

Série A  
N° 2428  
N° D'ORDRE :  
3300

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR **ROBERT CROISOT**

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES  
DE LONGUEUR INFINIE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le 6 mars 1951 devant la Commission d'Examen.

---

|              |                      |
|--------------|----------------------|
| MM. G. JULIA | <i>Président.</i>    |
| A. CHÂTELET  | } <i>Examineurs.</i> |
| P. DUBREIL   |                      |

---

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—  
1953



Série A  
N° 2428  
N° D'ORDRE :  
3300

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR ROBERT CROISOT

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES  
DE LONGUEUR INFINIE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le 6 mars 1951 devant la Commission d'Examen.

---

|              |                      |
|--------------|----------------------|
| MM. G. JULIA | <i>Président.</i>    |
| A. CHÂTELET  | } <i>Examineurs.</i> |
| P. DUBREIL   |                      |

---

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

---

1953



---

# PREMIÈRE THÈSE

---

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES DE LONGUEUR INFINIE

---

### INTRODUCTION.

On sait qu'un treillis est dit *modulaire* s'il vérifie la condition

$$x \geq y \quad \text{entraîne} \quad (x \cap z) \cup y = x \cap (z \cup y).$$

Il est bien connu que, *dans les treillis de longueur finie*, la modularité peut être caractérisée autrement : soit par l'ensemble des deux conditions :

(2)  $x$  couvre  $x \cap y$  implique  $x \cup y$  couvre  $y$   
et (2'), duale de (2), soit par l'ensemble des deux conditions :

(1)  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y$  implique  $x \cup y$  couvre  $x$  et  $y$   
et (1'), duale de (1).

La notion de treillis *semi-modulaire* de longueur finie a son origine dans l'idée d'imposer seulement la condition (2) ou la condition (1). Que l'on se place à l'un ou à l'autre point de vue, on aboutit à la même notion, les conditions (1) et (2) étant équivalentes *dans les treillis de longueur finie*. Cette notion est digne d'intérêt, car il existe des exemples importants de treillis de longueur finie semi-modulaires et non modulaires : treillis des variétés linéaires d'une géométrie affine, treillis des partitions d'un ensemble fini, treillis des sur-corps algébriquement fermés d'un corps  $K$  contenus dans un sur-corps de  $K$  de dimension finie. G. Birkhoff (*Lattice Theory*, Colloquium, 1949) a donné deux autres caractérisations des treillis semi-modulaires. En fait, *il existe*

une foule de conditions équivalentes à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie, conditions que j'introduis ici (Chap. I) et qui constituent autant de propriétés caractéristiques utiles de ces treillis. G. Birkhoff a remarqué la non-équivalence des caractérisations qu'il indique lorsqu'on les étend à des treillis qui ne sont plus de longueur finie et il demande en particulier dans son problème 44 de comparer les deux dernières caractérisations dans les treillis quelconques et dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne. Je résous ce problème dans le Chapitre II en recherchant plus généralement toutes les implications binaires existant parmi les conditions introduites précédemment, successivement dans les treillis quelconques, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante. Cette étude montre que *la notion de semi-modularité se morcelle à l'extrême dans les treillis quelconques*. Un regroupement partiel des conditions apparaît lorsqu'on se borne aux treillis satisfaisant à une condition de chaîne, regroupement différent suivant qu'il s'agit de la condition de chaîne ascendante ou de la condition de chaîne descendante.

Cette divergence considérable des divers aspects de la semi-modularité dans les treillis quelconques soulève le problème de la définition générale d'un treillis semi-modulaire. Ce problème sera repris à l'occasion d'une autre publication <sup>(1)</sup>. Son étude conduit à adopter comme *définition générale de la semi-modularité* la condition suivante, due à S. Mac Lane :

$$(5) \quad x \cap z < y < x < x \cup z$$

entraîne l'existence de  $t$  tel que l'on ait

$$x \cap z < t \leq z \quad \text{et} \quad (t \cup y) \cap x = y.$$

Le Chapitre IV s'occupe de la validité des conditions examinées dans un exemple concret intervenant en Physique mathématique, celui des variétés linéaires fermées d'un espace de Hilbert.

Ce travail donne, en particulier, la solution des problèmes 44 et 47 de G. Birkhoff qu'il replace dans le cadre d'une étude beaucoup plus générale. D'autre part, il pourra être utile dans un certain nombre de questions, notamment dans la caractérisation axiomatique des exemples concrets importants de treillis semi-modulaires de longueur infinie et dans la recherche de tous les treillis vérifiant le théorème de Schreier (V. Korinek ayant montré que les seuls treillis de longueur finie vérifiant le théorème à un certain point de vue sont les treillis semi-modulaires).

La publication ci-dessus mentionnée sera consacrée à quelques applications et propriétés des notions étudiées ici.

---

<sup>(1)</sup> R. CROISOT [3]. (Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.)

Je tiens à remercier M. Dubreil, qui m'a constamment encouragé avant et pendant l'élaboration de ce travail, et à qui je dois de précieuses suggestions. J'exprime également ma très vive reconnaissance à M. Julia et à M. Châtelet, qui ont suivi mes travaux avec une grande bienveillance.

## CHAPITRE I.

### INTRODUCTION D'UN CERTAIN NOMBRE DE CONDITIONS ÉQUIVALENTES A LA SEMI-MODULARITÉ DANS LES TREILLIS DE LONGUEUR FINIE.

1. CONDITIONS PORTANT SUR DES CHAÎNES EXTRAITES DES TREILLIS. — *a.* Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un treillis. Envisageons  $x \cap y$  et  $x \cup y$ .

THÉORÈME 1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° Si une chaîne  $\{x_i\}$  telle que  $x \cap y \leq x_i \leq x$  est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  (telle que  $y \leq x_i \cup y \leq x \cup y$ ) est aussi sans répétition;

2° L'application  $x' \rightarrow x' \cup y$  du sous-treillis  $[x \cap y, x]$  <sup>(1)</sup> dans le sous-treillis  $[y, x \cup y]$  est biunivoque ( $x'_1 \neq x'_2$  entraîne  $x'_1 \cup y \neq x'_2 \cup y$ );

3° L'application  $y' \rightarrow y' \cap x$  du second de ces sous-treillis dans le premier est une application sur;

4° Toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ ;

5° Pour tout élément  $z$  tel que  $x \cap y \leq z \leq x$ , on a  $(z \cup y) \cap x = z$ ;

6° Le couple  $(x, y)$  est modulaire <sup>(2)</sup>, ce qui signifie que, pour tout élément  $z$  tel que  $z \leq x$ , on a  $z \cup (y \cap x) = (z \cup y) \cap x$ .

Démonstration. — Il est manifeste que 2° entraîne 1°.

3° entraîne 2° : si 2° est en défaut, il existe  $x'_1$  et  $x'_2$  tels que  $x'_1 \cup y = x'_2 \cup y$ ; on a  $(x'_1 \cup y) \cap x \geq x'_1$  et  $(x'_2 \cup y) \cap x \geq x'_2$ ;  $x'_1$  et  $x'_2$  étant distincts, il y a au moins une de ces inégalités qui est stricte, soit par exemple  $(x'_1 \cup y) \cap x > x'_1$ ;  $x'_1$  ne s'écrit certainement pas sous la forme  $y'_1 \cap x$  avec  $y \leq y'_1 \leq x \cup y$ , car on devrait avoir  $y'_1 \geq x'_1$  et  $y'_1 \geq y$ , donc  $y'_1 \geq x'_1 \cup y$  et  $y'_1 \cap x \geq (x'_1 \cup y) \cap x > x'_1$ ; 3° est aussi en défaut.

4° entraîne 3° : si 3° n'est pas satisfaite, il existe un élément  $x'$  tel que  $x \cap y \leq x' \leq x$  qui ne s'écrit pas sous la forme  $y' \cap x$ ; il suffit alors de faire passer une chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  par  $x'$  pour mettre 4° en défaut.

(1) La notation  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  désignent deux éléments d'un treillis tels que  $a \leq b$ , représente le sous-treillis convexe, ensemble des éléments  $u$  tels que  $a \leq u \leq b$ .

(2) Notion due à L. R. WILCOX [1].

5° entraîne 4° : la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  répond à la question, car  $x \cap y \leq x_i \leq x$  implique, en vertu de 5°,  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$ .

6° entraîne 5° trivialement.

1° entraîne 6° : supposons qu'il existe un élément  $z$  tel que 6° soit en défaut; on a  $x \cap y \leq z \cup (y \cap x) < (z \cup y) \cap x \leq x$ ; la chaîne sans répétition  $\{z \cup (y \cap x) < (z \cup y) \cap x\}$  est telle que la chaîne

$$\{[z \cup (y \cap x)] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup y\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

*Définition.* — Lorsque ces propriétés ont lieu, pour un couple  $(x, y)$ , je dis que ce couple vérifie la propriété a.

b. J'introduis les propriétés suivantes, analogues à 1° et 4° :

*Définitions.* —  $(x, y)$  vérifie la propriété b si, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  (telle que  $x \cap y \leq x_i \leq x$ ), la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  (telle que  $y \leq x_i \cup y \leq x \cup y$ ) est aussi maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété c si, pour toute chaîne maximale sans répétition  $\{x_i\}$ , la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  est aussi maximale sans répétition.

$(x, y)$  vérifie la propriété l si, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  est nécessairement maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété m si, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale.

c. En analogie avec le théorème 1, on a le théorème 2 :

THÉORÈME 2. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  <sup>(3)</sup> est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  (du treillis  $[x \cap y, x \cup y]$ ) est aussi sans répétition;

2° L'application  $(x', y') \rightarrow x' \cup y'$  de  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  dans  $[x \cap y, x \cup y]$  est biunivoque;

3° L'application  $z' \rightarrow (z' \cap x, z' \cap y)$  de  $[x \cap y, x \cup y]$  dans  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  est une application sur;

4° Toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  de  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x$ ,  $y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  de  $[x \cap y, x \cup y]$ ;

---

(3) Le produit cardinal  $T_1 \times T_2$  de deux treillis  $T_1$  et  $T_2$  est le treillis, ensemble des couples  $(x_1, x_2)$  où  $x_1 \in T_1$ ,  $x_2 \in T_2$ , dans lequel on a  $(x_1, x_2) \leq (x'_1, x'_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x'_1$  et  $x_2 \leq x'_2$  (G. BIRKHOFF [1], p. 7).

5° Pour tout élément  $u$  tel que  $x \cap y \leq u \leq x$  et pour tout élément  $v$  tel que  $x \cap y \leq v \leq y$ , les couples  $(x, v)$  et  $(y, u)$  sont modulaires.

*Démonstration.* — On voit, comme dans le théorème 1, que 2° entraîne 1°, 4° entraîne 3°, 5° entraîne 4° (ici, c'est la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  qui répond à la question).

3° entraîne 2° : si 2° est en défaut, il existe  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$  tels que  $x'_1 \cup y'_1 = x'_2 \cup y'_2$  avec  $(x'_1, y'_1) \neq (x'_2, y'_2)$ ; on a  $(x'_1 \cup y'_1) \cap x \geq x'_1$ ,  $(x'_2 \cup y'_2) \cap x \geq x'_2$ ,  $(x'_1 \cup y'_1) \cap y \geq y'_1$ ,  $(x'_2 \cup y'_2) \cap y \geq y'_2$ ; il y a donc une au moins des inégalités qui est stricte, soit par exemple  $(x'_1 \cup y'_1) \cap x > x'_1$ ;  $(x'_1, y'_1)$  ne s'écrit certainement pas sous la forme  $(z'_1 \cap x, z'_1 \cap y)$ , car on devrait avoir  $z'_1 \geq x'_1 \cup y'_1$ , d'où  $z'_1 \cap x \geq (x'_1 \cup y'_1) \cap x > x'_1$ ; 3° est alors en défaut.

1° entraîne 5° : supposons qu'il existe, par exemple, un élément  $v$  tel que 5° soit en défaut; il existe donc  $w \leq x$  tel que  $w \cup (v \cap x) \neq (w \cup v) \cap x$ ; on a alors  $x \cap y \leq w \cup (v \cap x) < (w \cup v) \cap x \leq x$  et la chaîne sans répétition  $\{(w \cup (v \cap x), v) < ((w \cup v) \cap x, v)\}$  est telle que la chaîne

$$\{w \cup (v \cap x) \cup v = [(w \cup v) \cap x] \cup v\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

*Définition.* — Lorsque ces propriétés ont lieu pour un couple  $(x, y)$ , je dis que ce couple vérifie la propriété  $d$ .

$d$ . J'introduis les propriétés suivantes, analogues aux propriétés 1° et 4° du théorème 2 :

*Définitions.* —  $(x, y)$  vérifie la propriété  $f$  si, pour toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du treillis  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est aussi maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété  $g$  si, pour toute chaîne maximale sans répétition du treillis  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est aussi maximale sans répétition.

$(x, y)$  vérifie la propriété  $i$  si, pour toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du treillis  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x, y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{z_i\}$  est nécessairement maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété  $j$  si, dans les mêmes conditions, la chaîne  $\{z_i\}$  peut être choisie maximale.

$e$ . En analogie avec les théorèmes 1 et 2, on a le théorème 3 :

THÉORÈME 3. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Si une chaîne  $\{z_i\}$  du treillis  $[x \cap y, x \cup y]$  est sans répétition, la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  du treillis  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$  est aussi sans répétition;

2° L'application  $z' \rightarrow (z' \cup x, z' \cup y)$  du premier treillis dans le second est biunivoque;

3° L'application  $(x', y') \rightarrow x' \cap y'$  du second treillis dans le premier est une application sur;

4° Toute chaîne maximale  $\{z_i\}$  du premier treillis peut être obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{x_i, y_i\}$  du second treillis;

5° Le couple  $(x, y)$  est  $\cap$ -distributif, ce qui signifie que, pour tout élément  $z$  tel que  $z \leq x \cup y$ , on a  $z \cup (x \cap y) = (z \cup x) \cap (z \cup y)$ .

*Démonstration.* — On voit, comme dans le théorème 1, que 2° entraîne 1°, 4° entraîne 3°, 5° entraîne 4° (ici, c'est la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  qui convient).

3° entraîne 2° : si 2° est en défaut, il existe  $z'_1$  et  $z'_2$  tels que  $z'_1 \cup x = z'_2 \cup x$  et  $z'_1 \cup y \neq z'_2 \cup y$ ; on a  $(z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) \geq z'_1$  et  $(z'_2 \cup x) \cap (z'_2 \cup y) \geq z'_2$ ; l'une au moins de ces inégalités est stricte, soit par exemple  $(z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) > z'_1$ ;  $z'_1$  ne s'écrit certainement pas sous la forme  $x'_1 \cap y'_1$ , car on devrait avoir  $x'_1 \geq z'_1, y'_1 \geq z'_1$ , d'où  $x'_1 \geq z'_1 \cup x, y'_1 \geq z'_1 \cup y$  et  $x'_1 \cap y'_1 \geq (z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) > z'_1$ ; 3° est donc en défaut.

1° entraîne 5° : supposons qu'il existe un élément  $z$  tel que 5° soit en défaut; on a  $x \cap y \leq z \cup (x \cap y) \neq (z \cup x) \cap (z \cup y) \leq x \cup y$ ; la chaîne sans répétition  $\{z \cup (x \cap y) < (z \cup x) \cap (z \cup y)\}$  est telle que la chaîne

$$\{[z \cup (x \cap y) \cup x, z \cup (x \cap y) \cup y] = [(z \cup x) \cap (z \cup y)] \cup x, [(z \cup x) \cap (z \cup y)] \cup y\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

*Définition.* — Lorsque ces propriétés ont lieu pour un couple  $(x, y)$ , je dis que ce couple vérifie la propriété *e*.

*f.* J'introduis les propriétés suivantes analogues aux propriétés 1° et 4° du théorème 3 :

*Définitions.* —  $(x, y)$  vérifie la propriété *p* si, pour toute chaîne maximale  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$  est aussi maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété *q* si, pour toute chaîne maximale sans répétition  $\{z_i\}$ , la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  est aussi maximale sans répétition.

$(x, y)$  vérifie la propriété *r* si, pour toute chaîne maximale  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ , la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est nécessairement maximale.

$(x, y)$  vérifie la propriété *s* si, dans les mêmes conditions, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  peut être choisie maximale.

g. Une grande partie des conditions examinées par la suite sont alors formées de la manière suivante :

Par exemple, je dirai qu'un treillis vérifie la condition (A) si chaque couple d'éléments  $(x, y)$  vérifie la propriété  $\alpha$ .

On obtient ainsi les conditions (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (I), (J), (L), (M), (P), (Q), (R), (S) <sup>(4)</sup>.

Je dirai aussi, par exemple, qu'un treillis vérifie la condition  $(\alpha)$  si le couple d'éléments  $(x, y)$  vérifie la propriété  $\alpha$  dès qu'il en est ainsi du couple d'éléments  $(y, x)$ .

On obtient ainsi les conditions  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\lambda)$ ,  $(\mu)$  <sup>(5)</sup>.

Ces conditions complètent d'une façon assez naturelle la condition (F) et la condition  $(\alpha')$  <sup>(6)</sup>.

h. Les théorèmes suivants permettent d'exprimer les conditions (M) et (S) sous une forme en apparence plus forte.

THÉORÈME 4. — La condition (M) équivaut à la condition suivante :

(M<sub>1</sub>) Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  est telle que l'on ait  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$  pour tout  $i$ , la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ .

Démonstration. — D'abord, (M<sub>1</sub>) entraîne (M). En effet, si, pour un couple  $(x, y)$ , une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , on a  $x_i \leq y_i$ , d'où  $x_i \cup y \leq y_i$  et  $(x_i \cup y) \cap x \leq y_i \cap x = x_i$ ; puisqu'on a évidemment  $x_i \leq (x_i \cup y) \cap x$ , on en déduit  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$  pour tout  $i$ . La chaîne  $\{x_i \cup y\}$  étant maximale d'après (M<sub>1</sub>), la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale et (M) est vérifiée.

On a également : (M) entraîne (M<sub>1</sub>). En effet, supposons que (M<sub>1</sub>) soit en défaut. Il existe un couple  $(x, y)$  et une chaîne  $\{x_i\}$  qu'on peut supposer sans répétition, maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , telle que l'on ait  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$  pour tout  $i$  et telle que la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  ne soit pas maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ . Soit  $u$  un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne  $\{x_i \cup y\}$ . La chaîne

<sup>(4)</sup> Les conditions (A), (C), (D), (E), (G), (P), (Q) ne caractérisent pas la semi-modularité dans les treillis de longueur finie. Elles sont introduites ici en raison de leur analogie avec les autres conditions. D'ailleurs, les conditions (A), (C), (D), (E), (G), (Q) seront exploitées dans R. CROISOT [3], Chap. I.

<sup>(5)</sup> De même, les conditions  $(\lambda)$  et  $(\mu)$  ne répondent pas à la question posée ici.

<sup>(6)</sup> La condition (F) est la condition  $(\gamma)$  de G. BIRKHOFF [1], p. 101. La condition  $(\alpha)$  est la condition  $(\alpha')$ , p. 101.

$\{x_i\}$  étant maximale, l'élément  $u \cap x$  en fait partie. Posons  $u \cap x = a$ ,  $a \cup y = b$  et envisageons le couple  $(x, b)$ . On a  $x \cap b = a$  et  $x \cup b = x \cup y$ . La chaîne  $\{x_i\}$ , où l'on n'accepte que les éléments  $x_i$  tels que  $x_i \supseteq a$  est maximale entre  $a$  et  $x$ . Elle est obtenue à partir de la chaîne  $\{x_i \cup b = x_i \cup y\}$  entre  $b$  et  $x \cup y$ . Mais, elle ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale  $\{y_i\}$  car, pour toute chaîne réalisant cette obtention, on a  $y_i \supseteq x_i \cup b = x_i \cup y > u$  pour tout  $i$  tel que  $x_i > a$  et l'élément  $u$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{y_i\}$  au-dessus du premier élément. Le couple  $(x, b)$  ne possède donc pas la propriété  $m$  et la condition (M) est en défaut.

THÉORÈME 5. — La condition (S) équivaut à la condition suivante :

(S<sub>1</sub>) Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{z_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  est telle que  $z_i = (z_i \cup x) \cap (z_i \cup y)$  pour tout  $i$ , la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ .

Démonstration. — On voit d'abord, comme dans la démonstration du théorème 4, que (S<sub>1</sub>) entraîne (S).

De même, (S) entraîne (S<sub>1</sub>). En effet, si (S<sub>1</sub>) est en défaut, il existe un couple  $(x, y)$  et une chaîne  $\{z_i\}$  qu'on peut supposer sans répétition, maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , telle que l'on ait  $z_i = (z_i \cup x) \cap (z_i \cup y)$  pour tout  $i$  et telle que la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  ne soit pas maximale dans le produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ . Soit  $(u, v)$  un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$ . La chaîne  $\{z_i\}$  étant maximale, l'élément  $u \cap v$  en fait partie. Posons  $u \cap v = c$ ,  $c \cup x = a$ ,  $c \cup y = b$  et envisageons le couple  $(a, b)$ . On a  $a \cap b = c$  et  $a \cup b = x \cup y$ . La chaîne  $\{z_i\}$ , où l'on n'accepte que les éléments  $z_i$  tels que  $z_i \supseteq c$  est maximale entre  $c$  et  $x \cup y$ , elle est obtenue à partir de la chaîne  $\{(z_i \cup a, z_i \cup b)\}$ . Mais elle ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  car, pour toute chaîne réalisant cette obtention, on a  $x_i \supseteq z_i \cup a = z_i \cup x \supseteq u$  pour tout  $i$  tel que  $z_i > c$ , et de même  $y_i \supseteq z_i \cup b = z_i \cup y \supseteq v$ , avec, de plus  $(z_i \cup x, z_i \cup y) \neq (u, v)$ , d'où  $(x_i, y_i) > (u, v)$ ; l'élément  $(u, v)$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  au-dessus du premier élément. Le couple  $(a, b)$  ne possède donc pas la propriété  $s$  et la condition (S) est en défaut.

i. A la condition (J), on peut de même associer la condition suivante :

(J<sub>1</sub>) Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  est telle que l'on ait  $x_i = (x_i \cup y_i) \cap x$  et  $y_i = (x_i \cup y_i) \cap y$  pour tout  $i$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  <sup>(7)</sup>.

(7) Notons, dès maintenant, que la condition (J) est strictement plus faible que la condition (J<sub>1</sub>). On voit aisément que (J<sub>1</sub>) entraîne (J) et le treillis B2 du Chapitre II montre que (J) n'entraîne pas (J<sub>1</sub>) [prendre le couple  $(c, a_1)$  et la chaîne  $\{(a, a) < \dots < (a, a_i) < \dots < (c, a_i)\}$ ].

2. CONDITIONS PORTANT SUR DES PROPRIÉTÉS DE COUVERTURE ET DES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES. — *a.* J'examinerai aussi les conditions suivantes :

- (1)  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $x$  et  $y$  <sup>(8)</sup>.
- (2)  $x$  couvre  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $y$  <sup>(9)</sup>.
- (3)  $x$  couvre  $y$ , et  $z$  couvre  $t \Rightarrow [(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$ .
- (5)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$  <sup>(10)</sup>.
- (6)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z < z$  <sup>(11)</sup>.

*b.* Le théorème suivant permet d'exprimer la condition (2) sous deux autres formes équivalentes :

THÉORÈME 6. — *La condition (2) équivaut à l'une ou l'autre des conditions :*

- (2*b*)  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$  <sup>(12)</sup>.
- (2*c*)  $x$  couvre  $x \cap z$  et  $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$ .

*Démonstration.* — On a d'abord (2)  $\Rightarrow$  (2*c*); supposons que la condition (2) soit

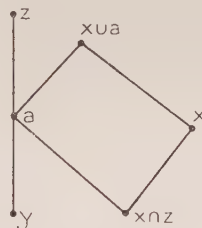


Fig. 1.

<sup>(8)</sup> Condition (ξ'), G. BIRKHOFF [1], p. 66.

<sup>(9)</sup> Condition (2), G. BIRKHOFF [1], p. 100, ou condition E<sub>4</sub>, S. MAC LANE [1].

<sup>(10)</sup> C'est la condition E<sub>5</sub> de S. MAC LANE [1].

<sup>(11)</sup> C'est la condition E<sub>6</sub> de S. MAC LANE [1].

<sup>(12)</sup> Cette condition m'a été inspirée par une remarque de L. Lesieur, selon laquelle, dans une géométrie affine, l'égalité modulaire a lieu dès que  $x$  est un point. Il est facile de voir que (2*b*)



Fig. 2.

renforce cette condition (qui ne suffit pas comme le montre le diagramme ci-contre à caractériser la semi-modularité dans un treillis de longueur finie quelconque).

satisfaite et que  $x$  couvre  $x \cap z$  avec  $z \geq y$ ; on a toujours  $z \cap (x \cup y) \geq (z \cap x) \cup y$ ; posons  $a = (z \cap x) \cup y$ ; on a  $x \cap a \leq x \cap z$  et  $x \cap a \geq x \cap z$ ; d'où  $x \cap a = x \cap z$ ; donc, d'après (2) et l'hypothèse,  $x \cup a$  couvre  $a$ ; de  $a \leq x \cup y \leq x \cup a$  et de  $a \not\geq x$ , on déduit  $x \cup y = x \cup a$ ; enfin, de  $x \neq x \cap z$ , on déduit  $z \not\geq x \cup a$  et  $z \cap (x \cup y) = z \cap (x \cup a) = a$ .

On a  $(2c) \Rightarrow (2b)$ ; en effet, si  $x$  couvre  $x \cap y$  et si l'on a  $z \geq y$ , du fait que l'on a  $x \geq x \cap z \geq x \cap y$ , on déduit ou bien  $x = x \cap z$ , c'est-à-dire  $z \geq x$ , auquel cas l'égalité à établir est évidente, ou bien  $x$  couvre  $x \cap z$ , auquel cas l'égalité à établir résulte de (2c).

Enfin, on a  $(2b) \Rightarrow (2)$ ; en effet, si (2) est en défaut, il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  ne couvre pas  $y$ ; choisissons un élément  $z$  tel que  $y < z < x \cup y$ ; on a alors  $z \cap (x \cup y) = z$  et  $(z \cap x) \cup y = (x \cap y) \cup y = y$ ; (2b) est aussi en défaut.

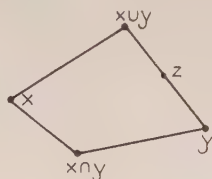


Fig. 3.

De là, résulte l'équivalence de la propriété (2) et de l'une ou l'autre des conditions de modularité affaiblie (2b) et (2c).

c. On sait que la condition (6) peut s'exprimer sous la forme équivalente :

(6a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que

$$y \cap z < t \leq y \quad \text{et} \quad (x \cup t) \cap z < z \quad (13).$$

De la même façon, le théorème suivant donne une forme équivalente à la condition (5) :

THÉORÈME 7. — La condition (5) équivaut à la condition :

(5a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$ .

Démonstration. — On a  $(5) \Rightarrow (5a)$ ; en effet, si l'hypothèse de (5a) est vérifiée, celle de (5) l'est également et la conclusion commune est vraie.

On a  $(5a) \Rightarrow (5)$ ; supposons vérifiée l'hypothèse de (5); si  $y \cup x = y \cup z$ , celle de (5a) est aussi vérifiée et la propriété a lieu; sinon, on a  $y \cup x \not\geq z$

(13) C'est la condition  $E_7$  de S. MAC LANE [1]. L'équivalence est établie p. 465.

et  $(y \cup x) \cap z = z_1 < z$ ; si l'on a  $z_1 = x$ , la propriété a lieu en prenant  $t = y$ ; sinon, les trois éléments  $x, y, z_1$  satisfont à l'hypothèse de (5a); il existe donc  $t_1$  tel que  $y \cap z = y \cap z_1 < t_1 \leq y$  et  $(x \cup t_1) \cap z_1 = x$ ; or, on a

$$(x \cup t_1) \cap z < (x \cup y) \cap z = z_1, \quad \text{d'où } (x \cup t_1) \cap z = (x \cup t_1) \cap z \cap z_1 = (x \cup t_1) \cap z_1 = x;$$

la propriété a lieu en prenant  $t = t_1$ .

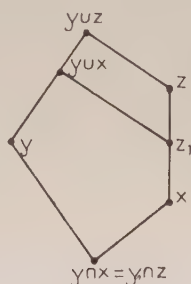


Fig. 4.

3. CONDITIONS PORTANT SUR LES TREILLIS D'IDÉAUX. — Un treillis de longueur finie est isomorphe à la fois au treillis de ses idéaux et au treillis de ses idéaux duaux <sup>(14)</sup>. Il en résulte que, si (X) représente une des conditions précédentes équivalente à la semi-modularité dans un treillis de longueur finie, la condition  $(X_i)$ , condition (X) imposée au treillis des idéaux et la condition  $(X^i)$ , condition (X) imposée au treillis des idéaux duaux, possèdent la même propriété. Le procédé peut évidemment être itéré.

Je n'étudie pas ici toutes les conditions  $(X^i)$ , mais seulement les conditions  $(\alpha^i)$ ,  $(2^i)$ ,  $(1^i)$  choisies parmi celles qui renforcent la condition (X) correspondante <sup>(15)</sup>.

De même, je me limite aux conditions  $(\alpha_i)$ ,  $(2_i)$ ,  $(1_i)$ .

4. AUTRES CONDITIONS. — Il existe encore un grand nombre de conditions caractérisant la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

a. Citons, par exemple, les conditions suivantes, entraînées par la condition (B) et entraînant la condition (2) :

(B<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$  et pour toute chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , il existe une chaîne  $\{y_i\}$  maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  telle que l'on ait  $y_i \geq x_i$  pour tout  $i$ .

(B<sub>2</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  telle que la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  soit maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ .

<sup>(14)</sup> Pour les définitions, voir G. BIRKHOFF [1], p. 21.

<sup>(15)</sup> En fait, la plupart des autres conditions  $(X^i)$  ne renforcent pas la condition (X) correspondante : le treillis B11 du Chapitre II satisfait, en effet, à toutes les conditions  $(X^i)$  et seulement aux conditions  $(\alpha)$ ,  $(2)$ ,  $(1)$ ,  $(5)$ ,  $(6)$ ,  $(3)$ , parmi les conditions (X).

(B<sub>3</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale sans répétition entre  $x \cap y$  et  $x$  et une chaîne  $\{y_i\}$  maximale <sup>(16)</sup> entre  $y$  et  $x \cup y$  telles que l'on ait  $y_i \supseteq x_i$  pour tout  $i$ .

(B<sub>4</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$  et pour toute chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , il existe une chaîne  $\{y_i\}$  maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  telle que l'on ait  $y_i \subseteq x_i \cup y$  pour tout  $i$ .

(B<sub>5</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale sans répétition entre  $x \cap y$  et  $x$  et une chaîne  $\{y_i\}$  maximale <sup>(16)</sup> entre  $y$  et  $x \cup y$  telles que l'on ait  $y_i \subseteq x_i \cup y$  pour tout  $i$ .

(B<sub>6</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$  et pour toute chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , il existe une chaîne  $\{y_i\}$  maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  (isomorphe à la chaîne  $\{x_i\}$ ).

(B<sub>7</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale sans répétition entre  $x \cap y$  et  $x$  et une chaîne  $\{y_i\}$  maximale <sup>(16)</sup> entre  $y$  et  $x \cup y$ .

Ces conditions ne sont pas étudiées ici.

b. Notons aussi la condition (B) (que nous n'étudierons pas non plus en détail) qui renforce également la condition (B) à un autre point de vue et qui est remarquable par le fait suivant : Bien que caractérisant la semi-modularité dans les treillis de longueur finie, elle n'est pas conséquence, dans les treillis quelconques, d'une propriété considérablement plus forte, la distributivité <sup>(17)</sup>.

Cette condition est la suivante :

(B) Soient trois éléments  $a, b, c$  tels que l'on ait  $a \subseteq b$ . Pour toute chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $a$  et  $b$ , la chaîne  $\{x_i \cup c\}$  est maximale entre  $a \cup c$  et  $b \cup c$ .

Un treillis semi-modulaire de longueur finie satisfait à cette condition. Il suffit de le montrer pour des éléments tels que l'on ait  $a \subseteq c$  (dans le cas général, on peut remplacer  $c$  par  $a \cup c$ ). Si l'on a  $b \cup c = a$ , le résultat traduit directement la condition (B). Sinon, il sera conséquence de la condition (B) et du fait suivant : la chaîne  $\{(b \cap c) \cup x_i\}$  est maximale entre  $b \cap c$  et  $b$ . Pour établir ce fait, appelons  $x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n = b$  les éléments de la chaîne  $\{x_i\}$ . Si l'on a  $x_2 \subseteq b \cap c$ , on a  $(b \cap c) \cup x_2 = b \cap c$ ; sinon, on a  $(b \cap c) \cap x_2 = x_1$  et, puisque  $x_2$  couvre  $x_1$ ,  $(b \cap c) \cup x_2$  couvre  $b \cap c$ , d'après la condition (2). D'une façon générale, si l'on a  $x_i \subseteq (b \cap c) \cup x_{i-1}$ , on a  $(b \cap c) \cup x_i = (b \cap c) \cup x_{i-1}$ ; sinon on a  $[(b \cap c) \cup x_{i-1}] \cap x_i = x_{i-1}$  et,

<sup>(16)</sup> Pouvant présenter des répétitions.

<sup>(17)</sup> Parmi les conditions étudiées, la condition (I) présente une singularité du même ordre, quoique moins forte : elle n'est pas conséquence de la modularité dans les treillis quelconques (voir R. CROISOT [3], Chap. I).

puisque  $x_i$  couvre  $x_{i-1}$ ,  $(b \cap c) \cup x_i$  couvre  $(b \cap c) \cup x_{i-1}$ . La chaîne  $\{(b \cap c) \cup x_i\}$  est donc bien maximale et le résultat est démontré.

Un treillis distributif ne satisfait pas nécessairement à la condition  $(\overline{B})$  comme le montre le diagramme ci-dessous.

Il représente manifestement un treillis (complet) satisfaisant à la condition de chaîne ascendante. Ce treillis est distributif et ne satisfait pas à la condition (B) (il suffit de prendre  $a, b, c$  comme indiqué sur le diagramme).

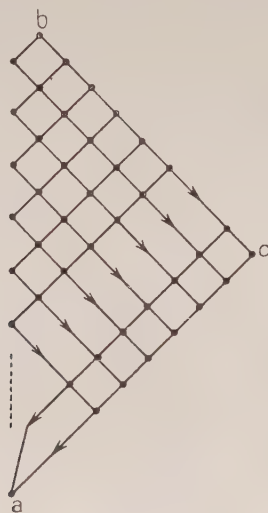


Fig. 5.

## CHAPITRE II.

### IMPLICATIONS BINAIRES RELIANT CES CONDITIONS DANS LES TREILLIS QUELCONQUES ET DANS LES TREILLIS SATISFAISANT A UNE CONDITION DE CHAÎNE.

#### 1. TREILLIS QUELCONQUES <sup>(18)</sup>.

THÉORÈME 1. — *Dans les treillis quelconques, les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans le tableau suivant (fig. 6) et par leurs conséquences logiques, à l'exclusion de toute autre.*

*a. Démonstration de ces implications.* — 1°  $(R) \Rightarrow (S)$  : Supposons qu'un couple  $(x, y)$  d'éléments d'un treillis vérifie la propriété  $r$ , c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ , la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  soit nécessairement maximale.

<sup>(18)</sup> Il sera montré plus loin, au Chapitre III, que ces conditions caractérisent la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

Il est alors évident que ce couple  $(x, y)$  vérifie aussi la propriété  $s$ , c'est-à-dire que, dans les mêmes conditions, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  peut être choisie maximale. Il en résulte immédiatement que  $(R)$  entraîne  $(S)$ .

2°  $(R) \Rightarrow (L)$  : On sait que, par définition, un couple  $(x, y)$  d'éléments d'un treillis vérifie la propriété  $l$  si, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  est nécessairement maximale. Supposons alors qu'un couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $r$  et montrons qu'il vérifie aussi la propriété  $l$ . Soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  obtenue à partir

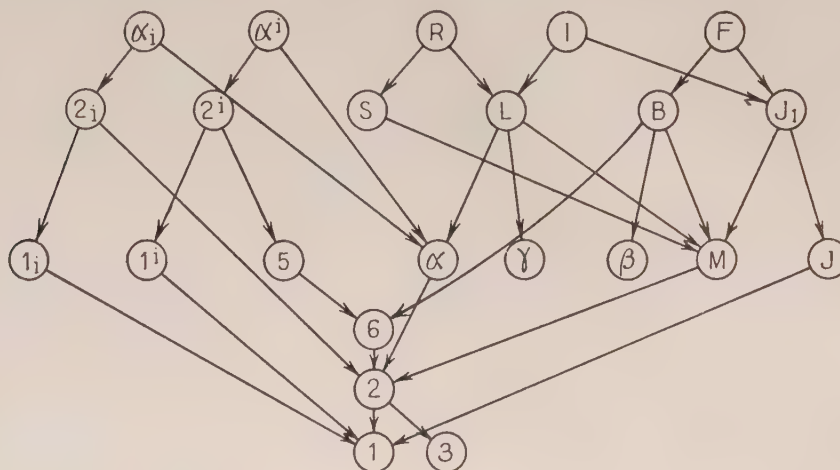


Fig. 6.

d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ . Envisageons une chaîne maximale quelconque  $\{u_\alpha\}$  entre  $x$  exclus et  $x \cup y$ . La chaîne  $\{z_\beta\} : \{x_i < u_\alpha\}$  <sup>(19)</sup> est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  et elle est obtenue sous la forme  $z_\beta = x_\beta \cap y_\beta$  à partir de la chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x, y_i) < (u_\alpha, x \cup y)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ . Le couple  $(x, y)$  vérifiant la propriété  $r$ , cette chaîne est maximale et, en particulier, la chaîne  $\{y_i\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ . On déduit immédiatement de là  $(R) \Rightarrow (L)$ .

3°  $(I) \Rightarrow (L)$  : Soit un couple  $(x, y)$  vérifiant la propriété  $i$ , c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x$ ,  $y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{z_i\}$  est nécessairement maximale. Montrons que ce couple  $(x, y)$  vérifie aussi la propriété  $l$ . Soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ . Envisageons une chaîne maximale quelconque  $\{u_\alpha\}$  entre  $x \cap y$

(19)  $\{x_i < u_\alpha\}$  désigne la chaîne obtenue en juxtaposant les chaînes  $\{x_i\}$  et  $\{u_\alpha\}$ .

et  $y$  exclus. La chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x \cap y, u_\alpha) < (x_i, y)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  et elle est obtenue sous la forme  $x_\beta = z_\beta \cap x$ ,  $y_\beta = z_\beta \cap y$  à partir de la chaîne  $\{z_\beta\} : \{u_\alpha < y_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ . Le couple  $(x, y)$  vérifiant la propriété  $i$ , cette chaîne est maximale et, en particulier, la chaîne  $\{y_i\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ . On voit donc que (I) entraîne (L).

4° (I)  $\Rightarrow$  (J<sub>1</sub>) : Un treillis satisfait à la condition (J<sub>1</sub>) si, pour tout couple  $(x, y)$  et pour toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y],$$

obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x$ ,  $y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale. Cette dernière chaîne pouvant être prise comme chaîne  $\{z_i\}$ , ceci a lieu dès que le couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $i$  et, par conséquent, on a (I)  $\Rightarrow$  (J<sub>1</sub>).

5° (F)  $\Rightarrow$  (B) : Supposons qu'un couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $f$ , c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y],$$

la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  soit maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ . Montrons qu'il vérifie aussi la propriété  $b$ , c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$ , la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  est maximale. En effet, soit une chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  et soit une chaîne maximale quelconque  $\{u_\alpha\}$  entre  $x \cap y$  et  $y$ . La chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x \cap y, u_\alpha) \leq (x_i, y)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ . La propriété  $f$  étant vérifiée, la chaîne  $\{x_\beta \cup y_\beta\}$  est maximale et, en particulier, la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ . On a donc (F)  $\Rightarrow$  (B).

6° (F)  $\Rightarrow$  (J<sub>1</sub>) : Cette implication est triviale.

7° (S)  $\Rightarrow$  (M) : Un couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $m$  si, pour toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale. Si un couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $s$ , il vérifie la propriété  $m$ . En effet, soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale (sans répétition) entre  $x \cap y$  et  $x$  obtenue à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$  et soit une chaîne maximale quelconque  $\{u_\alpha\}$  entre  $x$  et  $x \cup y$ . La chaîne  $\{z_\beta\} : \{x_i < u_\alpha\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  et est obtenue sous la forme  $z_\beta = x_\beta \cap y_\beta$  à partir de la chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x, y_i) \leq (u_\alpha, x \cup y)\}$  du produit cardinal

$$[x, x \cup y] \times [y, x \cup y].$$

Le couple vérifiant la propriété  $s$ , on peut choisir la chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta)\}$  pour qu'elle soit maximale entre  $(x, y)$  et  $(x \cup y, x \cup y)$ . Faisons ce choix.

L'élément  $x$  appartient à la chaîne  $\{z_\beta\}$  : c'est le dernier élément de la chaîne  $\{x_i\}$ ; il ne peut être obtenu sous la forme  $x_\beta \cap y_\beta$  qu'en prenant  $y_\beta = x \cup y$  et  $x_\beta = x$ . Les éléments précédents de la chaîne  $\{z_\beta\}$ , c'est-à-dire les éléments précédant  $x$  dans la chaîne  $\{x_i\}$  sont donc obtenus en prenant  $x_\beta \leq x$ , donc  $x_\beta = x$  et la chaîne  $\{(x_\beta, y_\beta) = (x, y_\beta)\}$  relative à ces éléments est maximale entre  $(x, y)$  et  $(x, x \cup y)$ ; autrement dit, la chaîne  $\{y_\beta\}$  relative à ces éléments est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  et peut être prise comme chaîne  $\{y_i\}$ ; le couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $m$  et l'on a  $(S) \Rightarrow (M)$ . [On peut aussi établir un peu plus rapidement que  $(S_1)$  implique  $(M_1)$ ].

8°  $(L) \Rightarrow (\alpha)$  : Plaçons-nous dans un treillis qui satisfait à la condition (L) et envisageons un couple  $(x, y)$  d'éléments du treillis vérifiant la propriété  $a$ , c'est-à-dire que tout élément  $x'$  tel que  $x \cap y \leq x' \leq x$  s'écrit sous la forme  $x' = y' \cap x$ , où  $y'$  est tel que  $y \leq y' \leq x \cup y$ . Il faut montrer que le couple  $(y, x)$  vérifie

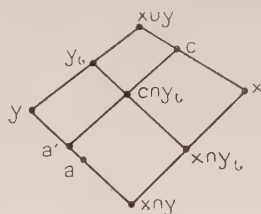


Fig. 7.

aussi la propriété  $a$ . Pour l'établir, nous utiliserons seulement le fait [qui a lieu puisque le couple  $(x, y)$  vérifie  $a$ ] qu'il existe une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$  telle que la chaîne  $\{x \cap y_i\}$  soit maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  <sup>(20)</sup>. Supposons, avec cette hypothèse, qu'il existe un élément  $a$  tel que  $x \cap y \leq a \leq x$  ne se mettant pas sous la forme  $a = b \cap y$  avec  $x \leq b \leq x \cup y$ . Posons  $a \cup x = c$ . On a  $c \cap y \geq a$  et  $c \cap y \neq a$ . Posons  $c \cap y = a'$ . Montrons que, moyennant cette supposition, le couple  $(x, a)$  ne peut vérifier la propriété  $L$ . On a d'abord  $a \cup x = c$ ,  $a \cap x = x \cap y$ . D'autre part, la chaîne  $\{c \cap y_i\}$  est une chaîne entre  $a'$  et  $c$ ; c'est donc aussi une chaîne entre  $a$  et  $c$  et certainement non maximale entre  $a$  et  $c$ . Pourtant, elle donne une chaîne maximale  $\{x \cap c \cap y_i = x \cap y_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$ . Il en résulte que la supposition faite n'est pas légitime; donc, le couple  $(y, x)$  vérifie  $a$  et l'on a  $(L) \Rightarrow (\alpha)$ .

9°  $(L) \Rightarrow (\gamma)$  : Montrons d'abord que, dans un treillis satisfaisant à la condition (L), un couple d'éléments  $(x, y)$  qui vérifie la propriété  $a$ , vérifie également la propriété  $b$ , c'est-à-dire que toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$

(20) Cette démonstration établit que la condition (L) entraîne la condition suivante [qui entraîne manifestement la condition  $(\alpha)$ ] : Si, pour un couple  $(x, y)$ , il existe une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$  telle que la chaîne  $\{x \cap y_i\}$  soit maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , le couple  $(y, x)$  est modulaire.

donne une chaîne maximale  $\{y \cup x_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ . Pour établir ce point, supposons que le couple  $(x, y)$  d'éléments d'un treillis satisfasse à la propriété  $a$  et non à la propriété  $b$ . Il existe donc une chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  telle que la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  ne soit pas maximale. Or, la propriété  $a$  ayant lieu, on a, pour tout élément  $x_i$ ,  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$ . Il en résulte que la chaîne non maximale  $\{x_i \cup y\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$  conduit à la chaîne maximale  $\{(x_i \cup y) \cap x\}$ , ce qui prouve que le couple  $(x, y)$  ne vérifie pas la propriété  $b$ .

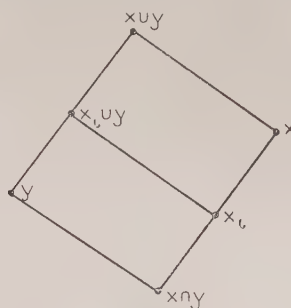


Fig. 8.

D'autre part, pour un couple  $(x, y)$ , vérifier la propriété  $c$  (toute chaîne maximale sans répétition  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  conduit à une chaîne maximale sans répétition  $\{x_i \cup y\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ ) équivaut à vérifier simultanément les propriétés  $a$  et  $b$ . En effet, si les propriétés  $a$  et  $b$  ont lieu, il est évident que la propriété  $c$  a lieu (en utilisant la forme 1° de la propriété  $a$ ). Réciproquement, supposons que la propriété  $c$  ait lieu; alors, une chaîne maximale  $\{x_i\}$  donne une chaîne maximale  $\{x_i \cup y\}$  (on supprime les répétitions éventuelles pour appliquer la propriété  $c$ , la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  reste maximale lorsqu'on les rétablit) et la propriété  $b$  a lieu; de même, une chaîne sans répétition  $\{x_i\}$  donne une chaîne sans répétition  $\{x_i \cup y\}$  (on rend la chaîne  $\{x_i\}$  maximale pour appliquer la propriété  $c$ , la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  reste sans répétition quand on supprime les éléments introduits) et la propriété  $a$  a lieu.

Le rapprochement de ces remarques montre que  $(L) \Rightarrow (\gamma)$ . En effet, si la condition  $(L)$  est vérifiée et si un couple  $(x, y)$  satisfait à la propriété  $c$ , il satisfait à la propriété  $a$ . Le couple  $(y, x)$  satisfait à la propriété  $a$ , puisque  $(L) \Rightarrow (\alpha)$ ; il satisfait donc aussi à la propriété  $b$  et, par conséquent, à la propriété  $c$ . La condition  $(\gamma)$  est vérifiée.

10°  $(L) \Rightarrow (M)$  : Il est évident qu'un couple  $(x, y)$  satisfait à la propriété  $m$  dès qu'il satisfait à la propriété  $l$ . On a donc  $(L) \Rightarrow (M)$ .

11°  $(B) \Rightarrow (6)$  : Supposons que la condition  $(6)$  soit en défaut. Il existe, d'après le théorème 7 du Chapitre I, trois éléments  $x, y, z$  tels que  $y \cap z = y \cap x < x < z < y \cup x = y \cup z$  et tels que, pour tout élément  $t$  vérifiant  $y \cap x < t \leq y$ , on ait  $t \cup x \geq z$ . On voit immédiatement que la condition  $(B)$

est en défaut : le couple  $(y, x)$  ne vérifie pas la propriété  $b$ . En effet, n'importe quelle chaîne maximale  $\{y_i\}$  entre  $y \cap x$  et  $y$  donne une chaîne  $\{y_i \cup x\}$  non maximale, car on peut y intercaler l'élément  $z$  (aucun élément  $y_i > y \cap x$  ne peut être tel que  $y_i \cup x = z$ , puisque  $y \cap x = y \cap z$ ).

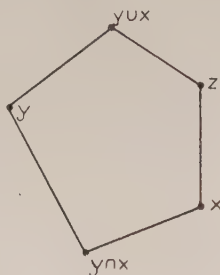


Fig. 9.

12°  $(B) \Rightarrow (\beta)$  : Cette propriété est évidente.

13°  $(B) \Rightarrow (M)$  : Cette implication est triviale si l'on utilise  $(M)$  sous la forme équivalente  $(M_1)$ .

14°  $(J_1) \Rightarrow (M)$  : Supposons que  $(J_1)$  ait lieu et montrons qu'il en est de même de  $(M_1)$ . Soient deux éléments  $x$  et  $y$  tels qu'il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  avec  $x_i = (x_i \cup y) \cap x$  pour tout  $i$ . Envisageons une chaîne  $\{u_\alpha\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $y$  et considérons la chaîne du produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  obtenue en juxtaposant les chaînes  $\{(x \cap y, u_\alpha)\}$  et  $\{(x_i, y)\}$ . Cette chaîne satisfait à l'hypothèse de la condition  $(J_1)$ . Donc, la chaîne  $\{u_\alpha \leq x_i \cup y\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , ce qui montre que la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  l'est entre  $y$  et  $x \cup y$ . On a donc  $(J_1) \Rightarrow (M)$ .

15°  $(J_1) \Rightarrow (J)$  : Cette propriété est immédiate.

16°  $(\alpha) \Rightarrow (2)^{(21)}$  : Plaçons-nous dans un treillis qui ne satisfait pas à la condition  $(2)$ . Il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  ne couvre pas  $y$ . On peut donc trouver un élément  $z$  tel que  $y < z < x \cup y$ . Le couple  $(x, z)$  vérifie  $a$ , puisque  $x$  couvre  $x \cap z = x \cap y$  et le couple  $(z, x)$  ne vérifie pas  $a$ , car  $y$  ne peut s'écrire sous la forme  $z \cap c$  avec  $x \leq c \leq x \cup y = x \cup z$ . La condition  $(\alpha)$  est donc aussi en défaut.

17°  $(M) \Rightarrow (2)$  : La condition  $(2)$  n'étant pas satisfaite, il existe deux éléments  $x$  et  $y$  comme dans la démonstration précédente et le couple  $(x, y)$  ne vérifie pas  $m$ , car la chaîne maximale  $\{x \cap y < x\}$  ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ .  $(M)$  est en défaut.

---

(21) La propriété 16° est due à I. KAPLANSKY. Voir G. BIRKHOFF [1], exercice 2, p. 101.

18° (J)  $\Rightarrow$  (1) : Supposons (1) en défaut. Il existe trois éléments  $x, y$  et  $z$  tels que  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y$  et  $x \cup y > z > y$ . La chaîne

$$\{(x \cap y, x \cap y) < (x \cap y, y) < (x, y)\}$$

satisfait à l'hypothèse de la propriété  $j$  pour le couple  $(x, y)$  sans satisfaire à sa conclusion. D'où (J)  $\Rightarrow$  (1).

19° (6)  $\Rightarrow$  (2) <sup>(22)</sup> : (2) étant en défaut, il existe  $x, y, z$  tels que

$$x \cap z < y < z < x \cup y$$

et  $x$  couvre  $x \cap y$ ; il n'existe donc aucun élément  $t$  tel que  $x \cap z < t \leq x$  et  $(y \cup t) \cap z < z$  et (6) est aussi en défaut.

20° (2)  $\Rightarrow$  (1) : Cette implication est manifeste.

21° (2)  $\Rightarrow$  (3) : Plaçons-nous dans un treillis vérifiant la condition (2) et envisageons, s'il en existe, deux couples d'éléments  $x$  et  $y, z$  et  $t$  tels que  $x$  couvre  $y$  et  $z$  couvre  $t$ . Il faut établir l'égalité  $[(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$ .

Supposons d'abord que l'on ait  $x \geq t$ . L'égalité à démontrer devient  $(x \cap z) \cup y = (z \cup y) \cap x$ . Or, de  $t \leq x$  et  $t \leq z$ , on déduit  $t \leq x \cap z$  et, puisque  $z$  couvre  $t$ ,  $x \cap z = z$  ou  $x \cap z = t$ . Si  $x \cap z = z$ , l'égalité a lieu trivialement. Si  $x \cap z = t$ ,  $z$  couvre  $x \cap z$  et l'égalité résulte de la forme (2c) de la condition (2) (Chap. I, théorème 6). On traite de la même façon le cas où l'on a  $z \geq y$ .

Supposons maintenant qu'on n'ait aucune de ces deux relations. On voit immédiatement qu'il n'existe entre les quatre éléments  $x, y, z, t$  aucune relation autre que  $x \geq y$  et  $z \geq t$ . Considérons l'élément  $y \cup t$ . Il est nécessairement distinct de  $x, y, z, t$ . Plusieurs cas sont possibles : on peut avoir  $y \cup t \geq x$  ou non,  $y \cup t \geq z$  ou non.

1<sup>er</sup> cas. —  $y \cup t \geq x$  et  $y \cup t \geq z$ . On a alors  $(y \cup t) \cap x = y$  et  $(y \cup t) \cap z = t$ . Par conséquent, d'après la condition (2),  $(y \cup t) \cup x = x \cup t$  couvre  $y \cup t$  et  $(y \cup t) \cup z = z \cup y$  couvre  $y \cup t$ . Ce cas se subdivise : ou bien  $x \cup t = z \cup y$ , ou bien  $x \cup t \neq z \cup y$ . Si  $x \cup t = z \cup y$ , l'égalité à établir devient  $z \cup y = x \cup t$ ; elle

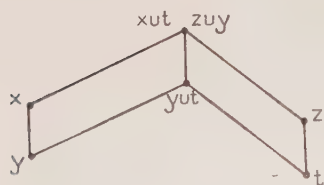


Fig. 10.

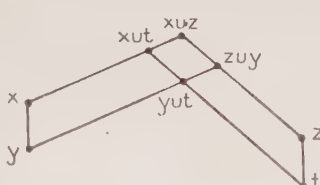


Fig. 11.

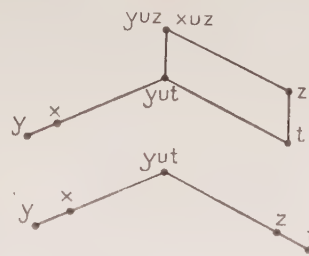


Fig. 12.

(22) La propriété 19° est due à S. MAC LANE [4].

est vérifiée. Si  $x \cup t \neq z \cup y$ , on a  $(x \cup t) \cap (z \cup y) = y \cup t$  et, d'après la condition (2),  $(x \cup t) \cup (z \cup y) = x \cup z$  couvre  $x \cup t$  et  $z \cup y$ . On a alors  $(x \cup t) \cap z = t$ , car on n'a pas  $x \cup t \geq z$  et  $(z \cup y) \cap x = y$ , car on n'a pas  $z \cup y \geq x$ . L'égalité à établir devient  $t \cup y = y \cup t$ ; elle est vérifiée.

2° cas. —  $y \cup t \geq x$  et  $y \cup t \not\geq z$ . On a  $x \cup t = y \cup t$  et  $(y \cup t) \cap z = t$ ,  $(y \cup t) \cup z = y \cup z = x \cup z$  couvre  $y \cup t$ . L'égalité à démontrer devient  $t \cup y = x \cup t$  qui est satisfaite. Le cas où  $y \cup t \not\geq x$  et  $y \cup t \geq z$  se traite de la même façon.

3° cas. —  $y \cup t \geq x$  et  $y \cup t \geq z$ . On a  $y \cup t = x \cup t = z \cup y = x \cup z$ . L'égalité s'écrit  $z \cup y = x \cup t$  qui est satisfaite.

22°  $(\alpha_i) \Rightarrow (2_i) \Rightarrow (1_i)$ ;  $(\alpha^i) \Rightarrow (2^i) \Rightarrow (1^i)$  : Dans les treillis quelconques, on sait qu'on a  $(\alpha) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ . Ces implications ont donc lieu dans les treillis d'idéaux, et dans les treillis d'idéaux duaux.

23°  $(\alpha_i) \Rightarrow (\alpha)$  : Envisageons un treillis  $L$  qui vérifie la condition  $(\alpha_i)$ , c'est-à-dire que le treillis  $L_i$  de ses idéaux vérifie la condition  $(\alpha)$  et supposons que,

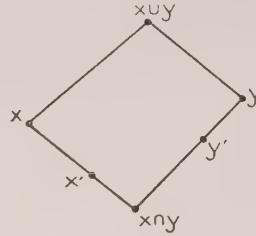


Fig. 13.

pour tout élément  $x'$  tel que  $x \cap y \leq x' \leq x$ , on ait  $(x' \cup y) \cap x = x'$ . Il faut montrer que, pour tout élément  $y'$  tel que  $x \cap y \leq y' \leq y$ , on a  $(y' \cup x) \cap y = y'$ .

Plaçons-nous dans  $L_i$  et montrons que, pour tout élément  $x'$  tel que  $(x \cap y) \leq x' \leq (x)$ , on a  $[x' \cup (y)] \cap (x) = x'$  <sup>(23)</sup>. Si  $x'$  est un idéal principal  $(x')$ , ceci est trivial, car on sait que  $(x_1 \cup x_2) = (x_1) \cup (x_2)$  et  $(x_1 \cap x_2) = (x_1) \cap (x_2)$ . Sinon,  $x'$  est caractérisé par l'ensemble  $X'$  de ses éléments compris entre  $x \cap y$  et  $x$  :  $x'$  est, en effet, l'ensemble des éléments  $u$  tels qu'il existe  $x' \in X'$  avec  $u \leq x'$ .  $x' \cup (y)$  est alors l'ensemble des éléments  $v$  tels qu'il existe  $x' \in X'$  avec  $v \leq x' \cup y$ , et  $[x' \cup (y)] \cap (x)$  est l'ensemble des éléments  $w$  tels qu'il existe  $x' \in X'$  avec  $w \leq (x' \cup y) \cap x$ . Or, on a  $(x' \cup y) \cap x = x'$ . On en déduit  $[x' \cup (y)] \cap (x) = x'$ . Le treillis  $L_i$  vérifiant la condition  $(\alpha)$ , pour tout élément  $y'$  tel que  $(x \cap y) \leq y' \leq (y)$ , on a  $[y' \cup (x)] \cap (y) = y'$ . En particulier, ceci a lieu pour tout idéal principal

<sup>(23)</sup>  $(x)$  désigne l'idéal principal engendré par l'élément  $x$ , ensemble des éléments  $u$  tels que  $u \leq x$ .

$\eta' = (y')$ . C'est dire que, pour tout élément  $y' \in L$  tel que  $x \cap y \leq y' \leq y$ , on a  $(y' \cup x) \cap y = y'$ .

24°  $(\alpha^i) \Rightarrow (\alpha)$  : Nous considérons ici un treillis  $L$  qui vérifie la condition  $(\alpha^i)$ , c'est-à-dire que le treillis  $L^i$  de ses idéaux duaux vérifie la condition  $(\alpha)$  et nous montrons qu'il satisfait à la condition  $(\alpha)$ .

Il suffit de reprendre la démonstration précédente, en y remplaçant  $u \leq x'$   $v \leq x' \cup y$ ,  $w \leq (x' \cup y) \cap x$ , respectivement par  $u \geq x'$ ,  $v \geq x' \cup y$ ,  $w \geq (x' \cup y) \cap x$ .

25°  $(2_i) \Rightarrow (2)$  : Soit  $L$  un treillis tel que le treillis  $L_i$  vérifie la condition  $(2)$ . Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $L$  tels que  $x$  couvre  $x \cap y$ . Dans  $L_i$ , l'idéal principal  $(x)$  couvre l'idéal principal  $(x \cap y)$ . Donc, l'idéal principal  $(x \cup y)$  couvre l'idéal principal  $(y)$ . On en déduit que, dans  $L$ ,  $x \cup y$  couvre  $y$ .

26°  $(2^i) \Rightarrow (5)$  <sup>(24)</sup> : Soit  $L$  un treillis dans lequel la condition  $(5)$  est en défaut. Il existe, dans  $L$ , trois éléments  $a, b, c$  tels que l'on ait

$$b \cap c = b \cap a < a < c < b \cup a = b \cap c$$

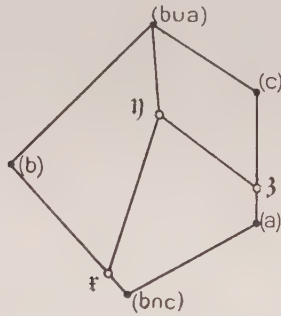


Fig. 14.

et tels que, pour tout élément  $x$  satisfaisant à  $b \cap c < x \leq b$ , on ait  $(x \cup a) \cap c > a$ . Plaçons-nous dans le treillis  $L^i$ . Considérons les idéaux duaux suivants (éléments de  $L_i$ ) : 1° l'idéal principal  $(b \cap c)$ ; 2° l'idéal  $\mathfrak{x}$ , ensemble des éléments  $u$  de  $L$  tels qu'il existe un idéal  $\mathfrak{x}_i$  d'une chaîne maximale d'idéaux  $\{\mathfrak{x}_i\}$  entre  $(b \cap c)$  exclus et  $(b)$  (choisie une fois pour toutes) avec  $u \in \mathfrak{x}_i$  : on voit que  $\mathfrak{x}$  est un idéal et que cet idéal ne contient pas  $b \cap c$ ; on a donc  $\mathfrak{x} > (b \cap c)$ ; de plus,  $\mathfrak{x}$  couvre  $(b \cap c)$ , car il appartient nécessairement à la chaîne maximale  $\{\mathfrak{x}_i\}$  et c'est l'élément minimum de cette chaîne; 3° l'idéal  $\eta = \mathfrak{x} \cup (a)$  : c'est l'ensemble des éléments  $v$  de  $L$  tels qu'il existe  $x \in \mathfrak{x}$  et satisfaisant à  $b \cap c < x \leq b$  avec  $v \geq x \cup a$ ; 4° l'idéal  $\mathfrak{z} = \eta \cap (c)$  : c'est l'ensemble des éléments  $w$  de  $L$  tels qu'il existe  $x$  avec  $w \geq (x \cup a) \cap c$ . Montrons que  $(2^i)$  est

<sup>(24)</sup> Cette propriété est aussi établie dans R. P. DILWORTH [1], p. 343.

alors en défaut. Il suffit de remarquer pour cela : 1°  $x \cup (a) = \eta$ ; 2°  $x \cap (a) = (b \cap c)$  : en effet,  $x \cap (a)$  est l'ensemble des éléments de  $L$  tels qu'il existe  $x$  avec  $t \supseteq x \cap a = b \cap c$ ; 3°  $x$  couvre  $(b \cap c)$ ; 4°  $\eta > \beta > (a)$  : en effet, d'une part,  $c \in \beta$  et  $c \notin \eta$ , car on ne peut trouver  $x$  avec  $c \supseteq x$  donc avec  $c \supseteq x \cup a$ ; d'autre part,  $a \in (a)$  et  $a \notin \beta$ , car on ne peut trouver  $x$  avec  $a \supseteq (x \cup a) \cap c$ , puisque (5) est défaut.

27°  $(1_i) \Rightarrow (1)$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un treillis  $L$  satisfaisant à  $(1_i)$  tels que  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y$ . Dans le treillis  $L_i$ ,  $(x)$  et  $(y)$  couvrent  $(x \cap y)$ ; par conséquent,  $(x) \cup (y) = (x \cup y)$  couvre  $(x)$  et  $(y)$  et, dans  $L$ ,  $x \cup y$  couvre  $x$  et  $y$ .

28°  $(1^i) \Rightarrow (1)$  : La démonstration précédente est valable,  $L^i$  remplaçant  $L_i$ .

29° (5)  $\Rightarrow$  (6) : Cette propriété est triviale.

*b. Indication des contre-exemples montrant qu'il n'y a pas d'implication binaire autre que celles-là et leurs conséquences logiques* <sup>(25)</sup>.

- 1°  $(\alpha_i) \not\Rightarrow (1^i), (6), (\gamma), (\beta), (M), (J) : B6.$
- 2°  $(\alpha^i) \not\Rightarrow (1_i), (\gamma), (\beta), (M), (J) : C9, B11.$
- 3°  $(R) \not\Rightarrow (1_i), (1^i), (6), (\beta), (J) : C9, B3, A4.$
- 4°  $(I) \not\Rightarrow (1_i), (1^i), (6), (\beta), (S) : C9, B3, C5,.$
- 5°  $(F) \not\Rightarrow (1_i), (1^i), (5), (\alpha), (\gamma), (S) : C2, B13, C5.$
- 6°  $(2_i) \not\Rightarrow (\alpha) : B1.$
- 7°  $(2^i) \not\Rightarrow (\alpha) : C2.$
- 8°  $(S) \not\Rightarrow (\alpha), (\gamma) : C2.$
- 9°  $(B) \not\Rightarrow (J) : A4.$
- 10°  $(1_i) \not\Rightarrow (3) : B2.$
- 11°  $(1^i) \not\Rightarrow (3) : C1.$
- 12°  $(5) \not\Rightarrow (1^i) : B14.$
- 13°  $(\gamma) \not\Rightarrow (1), (3) : C3.$
- 14°  $(\beta) \not\Rightarrow (1), (3) : C3.$
- 15°  $(J) \not\Rightarrow (3) : B2.$
- 16°  $(3) \not\Rightarrow (1) : A5.$

Les contre-implications qui précèdent suffisent pour s'assurer que le tableau du théorème 1 donne bien toutes les implications binaires reliant les conditions étudiées. De 1° à 5°, les contre-implications indiquées assurent que les conditions  $(\alpha_i)$ ,  $(\alpha^i)$ ,  $(R)$ ,  $(I)$ ,  $(F)$  n'entraînent rien qui ne résulte du tableau; par exemple, on a  $(R) \not\Rightarrow (I)$ , car on a  $(R) \not\Rightarrow (J)$ . De 6° à 16°, on a procédé de la même façon en ne figurant pas, de plus, ce qui résulte d'une contre-implication

---

<sup>(25)</sup> Les contre-exemples utilisés sont groupés et étudiés plus loin.

déjà écrite : par exemple, on a  $(2_i) \not\Rightarrow (L)$ , car on a  $(\alpha_i) \not\Rightarrow (L)$ ; de même, en plus des conditions que (R) n'entraîne pas, (L) ne doit pas entraîner (R) ni (S), mais cela résulte du fait que (I) n'entraîne pas (S).

## 2. TREILLIS À CONDITION DE CHAÎNE ASCENDANTE.

THÉORÈME 2. — *Dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante,*

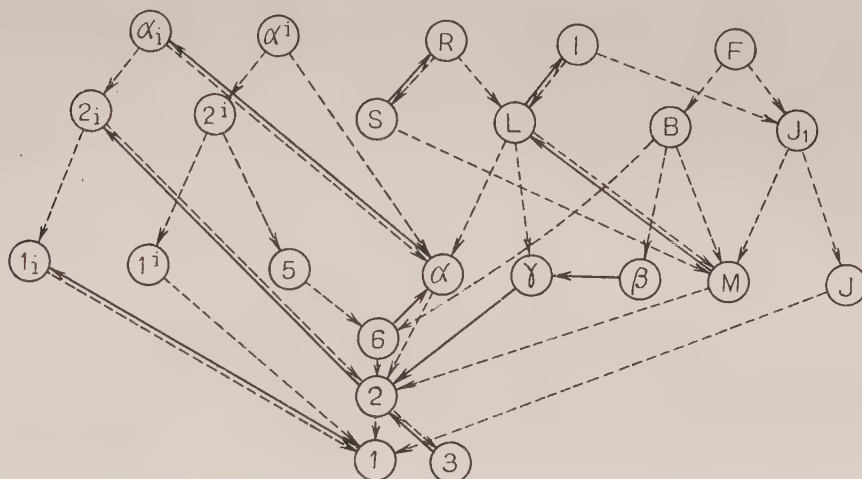


Fig. 15.

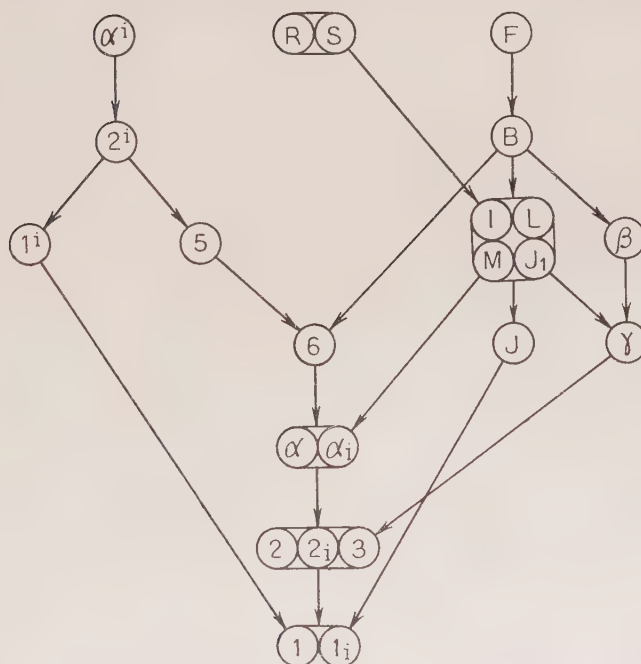


Fig. 16.

les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans la figure 15 et par leurs conséquences logiques <sup>(26)</sup>, ou par celles de la figure 16 obtenue en groupant les conditions qui deviennent équivalentes.

a. *Démonstration des implications supplémentaires.* — 1°  $(M) \Rightarrow (L)$  : La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 1. — Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, si la condition (M) est vérifiée et si une chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = x \cap y_i$ , à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  assurant cette obtention est unique.

*Démonstration.* — On peut toujours admettre, pour établir ce lemme, que la chaîne  $\{x_i\}$  est sans répétition; supposons qu'il existe deux chaînes telles que  $\{y_i\}$ . La chaîne  $\{x_i \cup y\}$  possède certainement cette propriété. Envisageons donc cette chaîne  $\{x_i \cup y\}$  et une autre  $\{y_i\}$ . Soit alors  $b$  l'élément de la

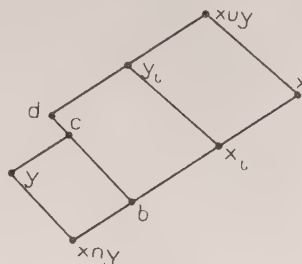


Fig. 17.

chaîne  $\{x_i\}$  maximal parmi ceux qui possèdent la propriété  $x_i \cup y \neq y_i$ . On a donc  $b \cup y = c < d$ ,  $d$  étant l'élément correspondant de la chaîne  $\{y_i\}$ ; et, pour tout élément  $x_i > b$ , on a  $x_i \cup y = y_i$ . Montrons que le couple  $(x, c)$  ne vérifie pas la propriété  $m$ . On a d'abord  $x \cap c = b$  et  $x \cup c = x \cup y$ . La chaîne  $\{x_i\}$  avec  $(x_i \geq b)$  maximale entre  $b$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne, la chaîne  $\{y'_i\}$  (avec  $y_i \geq d$ ) entre  $c$  et  $x \cup y$ . Or, il est impossible de choisir une autre chaîne entre  $c$  et  $x \cup y$ , soit  $\{y'_i\}$ , assurant cette obtention tout en étant maximale : en effet, la chaîne  $\{y'_i\}$  devant être maximale entre  $c$  et  $x \cup y$ ,  $c$  doit en faire partie et il conduit à  $b = c \cap x$ ; d'autre part, pour tout élément  $x_i$  tel que  $x_i > b$ , on doit avoir  $y'_i \geq x_i$  et  $y'_i \geq c$ , donc  $y'_i \geq x_i \cup c = x_i \cup y = y_i > d$ , ce qui montre que  $d$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{y'_i\}$  immédiatement au-dessus du premier élément  $c$ , si bien que la chaîne  $\{y'_i\}$  ne saurait être maximale. L'hypothèse faite conduisant à admettre

<sup>(26)</sup> Je pense qu'on a aussi  $(L) \Rightarrow (R)$ , mais je n'ai pu l'établir. Je n'ai pu décider non plus si l'on a ou non  $(2^t) \Rightarrow (2^f)$ . Les contre-exemples indiqués plus loin montrent qu'il ne peut y avoir d'implication binaire qui ne soit pas conséquence de ces deux-là et de celles figurées dans le tableau.

que la condition (M) est en défaut doit être rejetée et la chaîne  $\{y_i\}$  est unique. On a d'ailleurs  $y_i = x_i \cup y$ .

De ce lemme, il résulte immédiatement que, dans un treillis satisfaisant à la condition (M) et à la condition de chaîne ascendante, si une chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = x \cap y_i$ , à partir d'une chaîne maximale entre  $y$  et  $x \cup y$ ,  $\{y_i\}$ , on ne peut remplacer la chaîne  $\{y_i\}$  par une chaîne non maximale assurant cette obtention. On voit donc que l'on a  $(M) \Rightarrow (L)$ .

2° (S)  $\Rightarrow$  (R) : La démonstration, tout à fait analogue à la précédente, repose sur le lemme suivant :

LEMME 2. — Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, si la condition (S) est vérifiée et si une chaîne maximale  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  peut être obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$ , à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ , la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  assurant cette obtention est unique.

Démonstration. — Nous suivons la même marche que dans la démonstration

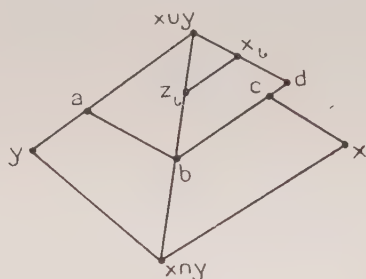


Fig. 18.

du lemme 1. Admettons que la chaîne  $\{z_i\}$  soit sans répétition et supposons qu'il existe une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  différente de la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  qui, elle, assure certainement l'obtention de la chaîne  $\{z_i\}$ . Soit alors  $b$  l'élément de la chaîne  $\{z_i\}$  maximal parmi ceux qui possèdent la propriété  $z_i \cup x \neq x_i$ , s'il en existe. S'il n'en existe pas, il existera au moins un élément tel que l'on ait  $z_i \cup y \neq y_i$  et l'on raisonnera de la même façon en remplaçant  $x$  par  $y$ . On a donc  $b \cup x = c < d$ ,  $d$  étant l'élément  $x_i$  correspondant; et, pour tout élément  $z_i > b$ , on a  $z_i \cup x = x_i$ . Posons  $b \cup y = a$  et montrons que le couple  $(c, a)$  ne vérifie pas la propriété  $s$ . On a d'abord  $c \cap a = b$  et  $c \cup a = x \cup y$ . La chaîne  $\{z_i\}$  (avec  $z_i \geq b$ ) maximale entre  $b$  et  $x \cup y$  est obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  [avec  $(x_i, y_i) \geq (d, e)$ ,  $e$  <sup>(27)</sup> étant l'élément  $y_i$  associé à  $x_i = d$  pour donner  $b$ ]. Or, il est impossible de choisir

(27) Il est possible que l'on ait  $e = a$ .

une autre chaîne entre  $(c, a)$  et  $(x \cup y, x \cup y)$ , soit  $\{(x'_i, y'_i)\}$  assurant cette obtention tout en étant maximale : en effet, la chaîne  $\{(x'_i, y'_i)\}$  devant être maximale entre  $(c, a)$  et  $(x \cup y, x \cup y)$ ,  $(c, a)$  doit en faire partie et il conduit à  $b = c \cap a$ ; d'autre part, pour tout élément  $z_i$  tel que  $z_i > b$ , on doit avoir  $x'_i \geq z_i$  et  $x'_i \geq c$ , donc  $x'_i \geq z_i \cup c = z_i \cup x = x_i \geq d$ ; l'élément  $(d, a)$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{(x'_i, y'_i)\}$ ; il n'en fait certainement pas partie, car on a  $d \cap a \geq c \cap a = b$  et  $d \cap a \leq d \cap e = b$ , donc  $d \cap a = b$  et l'élément  $b$  est obtenu à partir de l'élément  $(c, a)$ ; la chaîne  $\{(x'_i, y'_i)\}$  ne saurait être maximale. (S) étant vérifiée, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est unique et l'on a  $x_i = z_i \cup x$ ,  $y_i = z_i \cup y$ .

De ce lemme, il résulte facilement, comme dans la démonstration précédente, que l'on a  $(S) \Rightarrow (R)$  dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante.

(3°)  $(L) \Rightarrow (I)$  : Nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3. — Soient deux éléments  $s$  et  $x$  tels que  $s \leq x$  d'un treillis  $S$ , deux éléments  $t$  et  $y$  tels que  $t \leq y$  d'un treillis conditionnellement complet <sup>(28)</sup>  $T$ ; si la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[s, x] \times [t, y]$ , la chaîne  $\{x_i\}$  est maximale entre  $s$  et  $x$ . En particulier, soient deux éléments  $x$  et  $y$  d'un treillis conditionnellement complet; si la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , la chaîne  $\{x_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , la chaîne  $\{y_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $y$ .

Démonstration. — Supposons la chaîne  $\{x_i\}$  non maximale : on peut y intercaler un élément  $u$ . Soit  $I_0$  l'ensemble des indices  $i$  tels que l'on ait  $x_i < u$ . Posons  $y' = \bigcup_{i \in I_0} y_i$ . Cet élément existe, car l'ensemble d'éléments  $\{y_i\}$  est borné. Envisageons l'élément  $(u, y')$  du produit cardinal  $[s, x] \times [t, y]$ . On a  $u > x_i$  pour tout  $i \in I_0$ ,  $y' \geq y_i$  pour tout  $i \in I_0$ ;  $u < x_i$  pour tout  $i \notin I_0$ ,  $y' \leq y_i$  pour tout  $i \notin I_0$ . On voit qu'on peut intercaler l'élément  $(u, y')$  dans la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$ , en contradiction avec le fait qu'elle est maximale.

Remarquons que la deuxième propriété du lemme 3 est inexacte dans un treillis non conditionnellement complet. Par exemple, en désignant par  $R$  la chaîne des nombres rationnels  $r$  tels que  $0 \leq r \leq 1$ , le treillis  $R^2$  met la propriété en défaut. Prenons  $x = (0, 1)$ ,  $y = (1, 0)$  et plaçons dans la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  les éléments  $[(0, r), (0, 0)]$  avec  $r^2 < \frac{1}{2}$  et les éléments  $[(0, r), (1, 0)]$  avec  $r^2 > \frac{1}{2}$ . On voit que cette chaîne est maximale sans que la chaîne  $\{y_i\}$  le soit.

LEMME 4. — Un treillis qui satisfait à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) est conditionnellement complet.

<sup>(28)</sup> Pour la définition, cf. G. BIRKHOFF [1], p. 51.

*Démonstration.* — Montrons-le, par exemple, pour un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante. Soit  $\{u_\alpha\}$  un ensemble borné d'éléments du treillis. Cet ensemble admet un *plus petit majorant* : soit  $u_1$  un élément de l'ensemble. Si l'on n'a pas  $u_1 \supseteq u_\alpha$  pour tout  $\alpha$ , il existe  $u_2$  tel que  $u_2 \not\leq u_1$  et  $u_1 < u_1 \cup u_2$ . Si l'on n'a pas  $u_1 \cup u_2 \supseteq u_\alpha$  pour tout  $\alpha$ , il existe  $u_3$  tel que  $u_3 \not\leq u_1 \cup u_2$  et  $u_1 \cup u_2 < u_1 \cup u_2 \cup u_3$ . Et ainsi de suite. Cette chaîne ascendante est finie. Soit  $s$  son dernier élément. On a  $s = \bigcup_{\alpha} u_\alpha$ . L'ensemble  $\{u_\alpha\}$  admet aussi un *plus grand minorant*. Il existe un élément  $a$  du treillis tel que l'on ait  $a \leq u_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . On voit aisément que  $\bigcap_{\alpha} u_\alpha$  est égal à  $\bigcup_{\beta} a_\beta$  où  $\{a_\beta\}$  est l'ensemble des éléments tels que l'on ait  $a_\beta \leq u_\alpha$  pour tout  $\alpha$  <sup>(29)</sup>.

LEMME 5. — Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition (L), si  $x$  et  $y$  sont deux éléments tels qu'une chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \cap y, x]^* \times [x \cap y, y]$  soit obtenue à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  sous la forme  $x_i = z_i \cap x, y_i = z_i \cap y$ , la chaîne  $\{x_i\}$  peut être obtenue à partir d'une chaîne  $\{y'_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$  sous la forme  $x_i = y'_i \cap x$ , la chaîne  $\{y_i\}$  peut être obtenue à partir d'une chaîne  $\{x'_i\}$  entre  $x$  et  $x \cup y$  sous la forme  $y_i = x'_i \cap y$ .

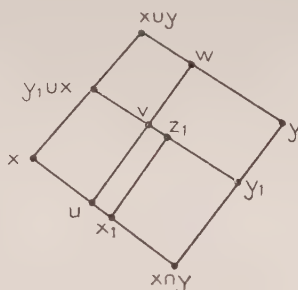


Fig. 19.

*Démonstration.* — On peut admettre que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est sans répétition. Comme il a déjà été remarqué, on peut prendre pour chaîne  $\{z_i\}$  la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  et il faut montrer qu'on a  $(x_i \cup y) \cap x = x_i, (y_i \cup x) \cap y = y_i$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit  $(x_i, y_i)$  l'élément maximal de la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  tel que l'une de ces deux égalités au moins soit en défaut ; par exemple, on a  $(x_i \cup y) \cap x = u > x_i$ . Soit  $I_0$  l'ensemble des indices  $i$  tels que l'on ait  $(x_i, y_i) > (x_i, y_i)$ . Pour tout  $i \in I_0$ , on a

$$(x_i \cup y) \cap x = x_i \supseteq (x_i \cup y) \cap x = u,$$

(29) On voit, par le même raisonnement, que, dans un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, il suffit de s'assurer que tout couple d'éléments admet un plus petit majorant, pour pouvoir affirmer qu'on a affaire à un treillis conditionnellement complet. S'il existe un élément zéro, on a un treillis complet.

et pour tout  $i \notin I_0$ , on a  $u > x_i \geq x_i$ . L'élément  $u$  peut donc être intercalé dans la chaîne  $\{x_i\}$ . Celle-ci étant maximale d'après le lemme 3 et le lemme 4,  $u$  appartient à cette chaîne dans laquelle il suit  $x_i$ . La chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  étant maximale, l'élément  $(u, y_i)$  lui appartient et il suit  $(x_i, y_i)$ . La chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  étant obtenue à partir de la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$ , on a nécessairement

$$x_i \cup y_i \neq u \cup y_i;$$

plus précisément, on a  $x_i \cup y_i = z_i < v = u \cup y_i$ . D'autre part, on a

$$z_i \cap y = v \cap y = y_i \quad \text{et} \quad z_i \cup y = v \cup y = w.$$

Montrons que le couple d'éléments  $(y, z_i)$  ne peut vérifier la propriété  $L$ . En effet, la chaîne  $\{y_i\}$  (avec  $y_i \geq y_i$ ) maximale d'après les lemmes 3 et 4, peut être obtenue sous la forme  $y_i = (y_i \cup x) \cap y$  à partir de la chaîne  $\{y_i \cup x\}$ , entre  $y_i \cup x$  et  $x \cup y$ ; elle peut, par conséquent, être obtenue sous la forme  $y_i = [(y_i \cup x) \cap w] \cap y$  à partir de la chaîne  $\{(y_i \cup x) \cap w\}$  entre  $(y_i \cup x) \cap w \geq v$  et  $w$ ; cette dernière chaîne n'est certainement pas maximale entre  $z_i$  et  $w = z_i \cup y$ , puisqu'elle ne contient pas l'élément  $z_i$ . La condition (L) devant être vérifiée, l'hypothèse faite est illégitime et le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, on a  $(L) \Rightarrow (I)$ . Pour cela, envisageons un tel treillis dans lequel la condition (I) soit en défaut. Nous pouvons y trouver un couple d'éléments  $(x, y)$  tel qu'il existe une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x, y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  non maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ . On peut admettre que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est sans répétition. D'autre part, on peut toujours supposer qu'on n'a pas, pour tout  $i$ ,  $z_i = x_i \cup y_i$ ; s'il en était ainsi, on pourrait toujours remplacer la chaîne  $\{z_i\}$  par une autre également non maximale, assurant la même obtention et où cette égalité ne serait pas toujours vérifiée; en effet, on peut intercaler un élément  $u$  dans la chaîne  $\{z_i\}$ ; l'élément  $(u \cap x, u \cap y)$  appartient à la chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$ , c'est-à-dire qu'on a, pour un certain  $i = i_0$ ,  $u \cap x = x_{i_0}, u \cap y = y_{i_0}$ ; on modifierait la chaîne  $\{z_i\}$  en remplaçant  $z_{i_0} = x_{i_0} \cup y_{i_0}$  par  $u \neq x_{i_0} \cup y_{i_0}$ . Faisons donc cette hypothèse et soit  $c$  l'élément maximal de la chaîne  $\{z_i\}$  parmi ceux pour lesquels on a  $z_i \neq x_i \cup y_i$ ; soient  $x_i = a, y_i = b$  les éléments correspondant à  $z_i = c$  et posons  $a \cup b = d$ . On a certainement  $c > d$ . Formons  $a \cup y = u$ . Deux cas sont possibles : ou bien on a  $u \geq c$ , ou bien il n'en est pas ainsi.

1<sup>er</sup> cas. —  $u \geq c$ . Alors, le couple  $(y, d)$  ne vérifie pas la propriété  $L$ . On a  $y \cap d = b, y \cup d = u$ . La chaîne  $\{y_i\}$  (avec  $y_i \geq b$ ) est maximale entre  $b$  et  $y$ , d'après le lemme 3. Elle est obtenue sous la forme  $y_i = (z_i \cap u) \cap y$  à partir de la chaîne  $\{z_i \cap u\}$  (avec  $z_i \geq c$ ) entre  $c$  et  $u$ , non maximale entre  $d$  et  $u$ .

2<sup>e</sup> cas. —  $u \not\geq c$ . Posons  $c \cup y = c \cup u = v$ . La chaîne  $\{x_i\}$  est maximale entre

$x \cap y$  et  $x$ , d'après le lemme 3. Étudions la chaîne  $\{x_i \cup y\}$ . Pour tout  $i$  tel que l'on ait  $x_i \leq a$ , on a  $x_i \cup y \leq a \cup y = u$ . Pour tout  $i$  tel que l'on ait  $x_i > a$ , on a  $x_i \cup y \geq x_i \cup y_i = z_i$ , d'après la définition de l'élément  $c$ , d'où l'on déduit  $x_i \cup y \geq z_i \cup y \geq c \cup y = v$ . Distinguons deux sous-cas : 1° *l'élément  $a$  de la chaîne  $\{x_i\}$  est couvert par un autre élément de cette chaîne* : remarquons que les éléments de la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  tels que l'on ait  $(x_i, y_i) > (a, b)$  satisfont à  $x_i > a$ , car si l'on avait  $(a, y_i) > (a, b)$ , on aurait  $a \cup y_i = z_i > c$ , d'après la définition de l'élément  $c$ , d'où l'on déduit  $u = a \cup y > c$ , ce qui montre qu'on serait dans le premier cas; il en résulte que, si un élément  $x_i = a'$  suit immédiatement  $a$  dans la chaîne  $\{x_i\}$ , l'élément  $(a', b)$  fait partie de la chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  et l'on a  $a' \cup b = d' > c$ , toujours d'après la définition de l'élément  $c$ ; on en déduit que le couple  $(a', d)$  ne vérifie pas la propriété  $l$ , car on a  $a' \cap d = a$ ,  $a' \cup d = d'$ ,  $a'$  couvre  $a$  et  $d'$  ne couvre pas  $d$ ; 2° *dans la chaîne  $\{x_i\}$ , l'élément  $a$*

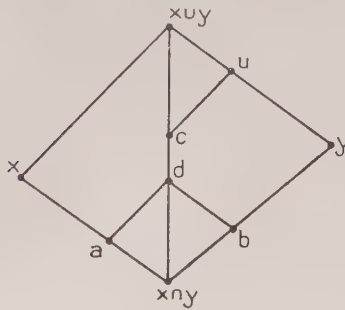


Fig. 20.

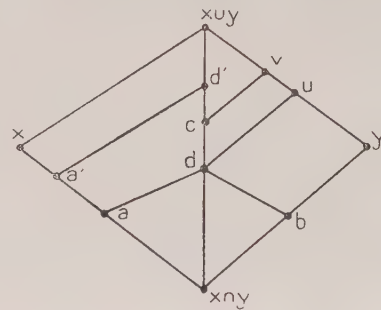


Fig. 21.

*n'admet pas de successeur immédiat* : si la condition (L) est satisfaite, il ne peut alors exister dans la chaîne  $\{x_i\}$  aucun élément tel que  $x_i \cup y = v$ , car si l'on avait pour  $x_i = a'' > a$ ,  $a'' \cup y = v$ , on aurait pour tout élément  $x_i$  tel que  $a'' \geq x_i > a$ ,  $x_i \cup y = v$ , en contradiction avec le lemme 5, puisqu'on doit avoir  $(x_i \cup y) \cap x = x_i$ ; le couple  $(x, y)$  ne peut donc pas vérifier la propriété  $l$ , puisque la chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  doit être obtenue à partir de la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , d'après le lemme 5 et que la chaîne  $\{x_i \cup y\}$  n'est pas maximale, puisqu'on peut y intercaler l'élément  $v$ ; on aboutit à une contradiction.

Dans les deux cas, la condition (L) ne peut être satisfaite et l'on a  $(L) \Rightarrow (I)^{(30)}$ .

4°  $(\gamma) \Rightarrow (2)$  : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (2). Il existe

<sup>(30)</sup> La même démonstration montre que, dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition (L), si une chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$$

est obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x$ ,  $y_i = z_i \cap y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , on a nécessairement  $z_i = x_i \cup y_i$ .

deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  ne couvre pas  $y$ . Soit  $z$  un élément tel que  $y < z < x \cup y$  et tel que  $x \cup y$  couvre  $z$  (il en existe d'après la condition de chaîne ascendante). Le couple  $(x, z)$  vérifie la propriété  $c$  et le

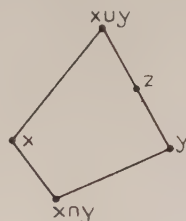


Fig. 22.

couple  $(z, x)$  ne vérifie pas la propriété  $c$ , car toute chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $z$  passant par l'élément  $y$  donne une chaîne  $\{z_i \cup x\}$  présentant une répétition :  $y \cup x = z \cup x$ . La condition  $(\gamma)$  est aussi en défaut et l'on a  $(\gamma) \Rightarrow (2)$ .

5°  $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$  : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition  $(\gamma)$ . Il existe un couple d'éléments  $(x, y)$  vérifiant la propriété  $c$ , alors que le couple  $(y, x)$  ne la vérifie pas. Toute chaîne maximale sans répétition  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  donne une chaîne maximale sans répétition  $\{x_i \cup y\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ . Si l'on suppose satisfaite la condition  $(\beta)$ , le couple  $\{x, y\}$  vérifiant la propriété  $b$  impliquée par la propriété  $c$ , le couple  $(y, x)$  la vérifie aussi et toute chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $y$  doit donner une chaîne maximale entre  $x$  et  $x \cup y$ . Il doit donc exister une chaîne maximale sans répétition  $\{y_i\}$  qui donne une chaîne maximale avec répétition  $\{y_i \cup x\}$ . Il existe donc deux éléments de la chaîne  $\{y_i\}$ , soient  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) tels que l'on ait  $a \cup x = b \cup x = c$ . Montrons

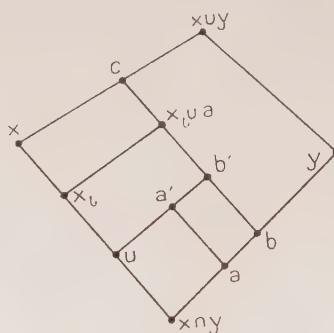


Fig. 23.

que le couple  $(a, x)$  vérifie la propriété  $b$  et que le couple  $(x, a)$  ne la vérifie pas, ce qui constituera une contradiction. On a d'abord  $a \cap x = x \cap y$  et  $a \cup x = c$ . Toute chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $a$  donne une chaîne maximale entre  $x$  et  $c$ , car toute chaîne maximale entre  $x \cap y$  et  $y$  donne une chaîne maximale entre  $x$  et  $x \cup y$ . D'autre part, soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \cap y$

et  $x$  : la chaîne  $\{x_i \cup a\}$  n'est certainement pas maximale entre  $a$  et  $c$ . Soit, en effet,  $u$  l'élément maximal parmi les éléments  $x_i$  tels que l'on ait  $x_i \cup a \neq x_i \cup b$ . Posons  $u \cup a = a'$ ,  $u \cup b = b'$ . Pour tout  $x_i$  tel que  $x_i > u$ , on a  $x_i \cup a = x_i \cup b \geq b'$ . Or, il ne peut exister aucun élément  $x_i$  tel que  $x_i \cup b = b'$ , car on a déjà  $u \cup b = b'$  et ceci contredirait le fait que le couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $c$ . L'élément  $b'$  peut donc être intercalé dans la chaîne  $\{x_i \cup a\}$  et cette chaîne n'est pas maximale. La condition  $(\beta)$  est donc en défaut et l'on a  $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ .

6°  $(3) \Rightarrow (2)$  : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition  $(2)$ . Il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  ne couvre pas  $y$ . Soit  $z$  un élément tel que  $y < z < x \cup y$  et  $t$  un élément tel que  $z > t \geq y$  et tel que  $z$

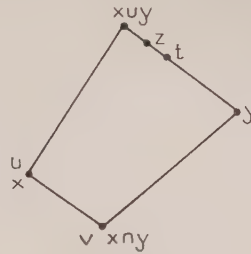


Fig. 24.

couvre  $t$  (il en existe d'après la condition de chaîne ascendante). Posons  $x = u$ ,  $x \cap y = v$ . Les couples d'éléments  $u$  et  $v$ ,  $z$  et  $t$  mettent la condition  $(3)$  en défaut. En effet, on a d'une part  $[(u \cup t) \cap z] \cup v = z$  et l'on a d'autre part  $[(z \cup v) \cap u] \cup t = t$ . On a donc bien  $(3) \Rightarrow (2)$ .

7°  $(\alpha) \Rightarrow (\alpha_i)$ ,  $(2) \Rightarrow (2_i)$ ,  $(1) \Rightarrow (1_i)$  : Ces propriétés résultent trivialement du fait que, pour un treillis  $L$  satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, le treillis  $L_i$  de ses idéaux se réduit au treillis des idéaux principaux, donc est isomorphe à  $L$ .

8°  $(6) \Rightarrow (\alpha)$  : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition  $(\alpha)$ . Il existe un couple d'éléments  $(x, y)$  tel que, pour tout élément  $x'$  avec  $x \cap y \leq x' \leq x$ ,

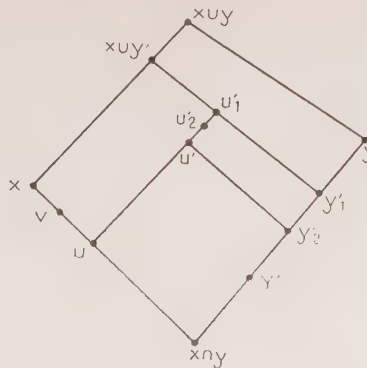


Fig. 25.

on ait  $(x' \cup y) \cap x = x'$ , alors que, pour un élément au moins  $y'$  avec  $x \cap y \leq y' \leq y$ , on ait  $(y' \cup x) \cap y = y'_1 > y'$ . Supposons que le treillis envisagé satisfasse à la condition (6). Il existe au moins un élément  $z$  avec  $x \cap y < z \leq x$  tel qu'on ait  $(z \cup y') \cap y'_1 = y'_2 < y'_1$ . Soit  $u$  un élément maximal parmi les éléments  $z$  possédant cette propriété. Posons  $u \cup y' = u'$ ,  $u \cup y'_1 = u'_1$ . On a  $u' \cup x = u'_1 \cup x = x \cup y'$ . On a aussi  $u \leq u' \cap x \leq (u \cup y) \cap x = u$ , d'où  $u' \cap x = u$ ; de même, on a  $u'_1 \cap x = u$ . Pour tout élément  $v$  tel que  $u < v \leq x$ , on a  $(v \cup u') \cap u'_1 = u'_1$ ; en effet, si l'on avait  $(v \cup u') \cap u'_1 = u'_2 < u'_1$ , on aurait  $(v \cup y') \cap y'_1 \leq (v \cup u') \cap u'_1 = u'_2$ , d'où  $(v \cup y') \cap y'_1 \leq u'_2 \cap y'_1 < y'_1$ , en contradiction avec la définition de  $u$ . Il résulte de là que (6) est en défaut, ce qui infirme l'hypothèse. On a donc  $(6) \Rightarrow (\alpha)$ .

*b. Indication des contre-exemples <sup>(25)</sup> :*

- 1°  $(\alpha^i) \not\Rightarrow (\gamma), (J) : B_{11}$ .
- 2°  $(R) \not\Rightarrow (1^i), (6), (\beta) : B_3$ .
- 3°  $(F) \not\Rightarrow (1^i), (5) : B_{13}$ .
- 4°  $(B) \not\Rightarrow (F) : B_4$ .
- 5°  $(J) \not\Rightarrow (2) : B_2$ .
- 6°  $(1^i) \not\Rightarrow (2) : B_{16}$ .
- 7°  $(5) \not\Rightarrow (1^i) : B_{14}$ .
- 8°  $(\beta) \not\Rightarrow (J), (\alpha) : B_9$ .

La remarque faite à la suite de l'indication des contre-exemples du paragraphe 1 est valable ici.

### 3. TREILLIS A CONDITION DE CHAÎNE DESCENDANTE.

THÉORÈME 3. — *Dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante,*

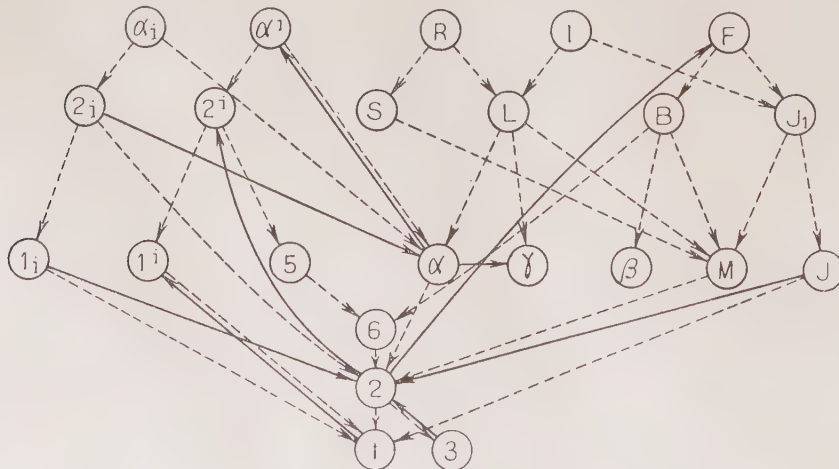


Fig. 20.

les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans la figure 26 et par leurs conséquences logiques <sup>(31)</sup>, ou par celles de la figure 27 obtenue en groupant des conditions qui deviennent équivalentes.

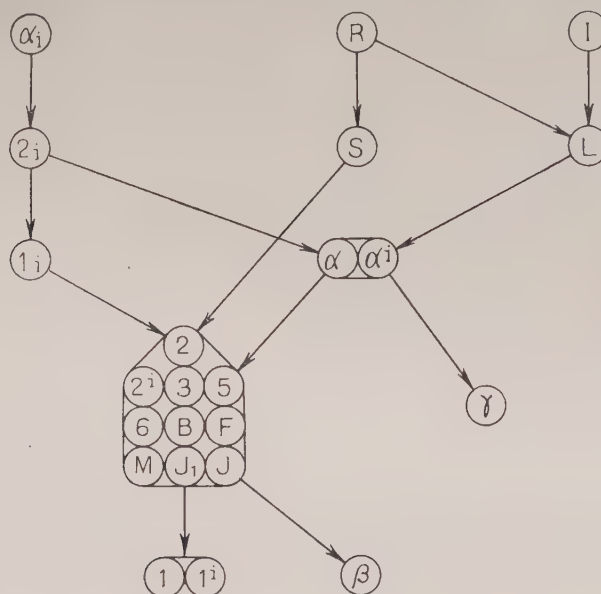


Fig. 27.

a. *Démonstration des implications supplémentaires.* —  $(2) \Rightarrow (F)$  : Soit un treillis qui ne satisfait pas à (F). Il existe un couple d'éléments  $(x, y)$  ne possédant pas la propriété  $f$ , c'est-à-dire qu'il existe une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  qu'on peut supposer sans répétition, maximale dans le produit cardinal

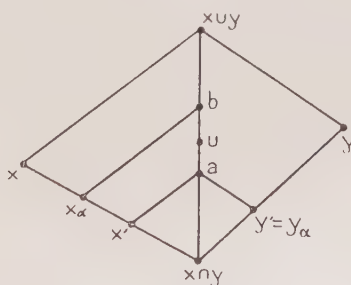


Fig. 28.

$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , telle que la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  ne soit pas maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ . On peut intercaler un élément  $u$  dans la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$ . Le

<sup>(31)</sup> Il est possible qu'on ait aussi :  $(\alpha) \Rightarrow (L)$ ,  $(1_i) \Rightarrow (\alpha_i)$ ,  $(1_i) \Rightarrow (R)$ . Les contre-exemples indiqués plus loin montrent qu'il ne peut y avoir d'implication binaire qui ne soit pas conséquence de celles-là et de celles figurées dans le tableau.

On en déduit  $l = \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y]$ , c'est-à-dire que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est nécessairement maximale. La condition (R) est vérifiée et l'équivalence des conditions étudiées est établie.

**THÉORÈME.** — *Un treillis de longueur finie est semi-modulaire si et seulement s'il satisfait à l'une quelconque des conditions suivantes* <sup>(38)</sup> :

(R) Pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments, si une chaîne  $\{z_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  est obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(S) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  assurant cette obtention peut être choisie maximale.

(S<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  est maximale.

(I) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  est obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x, y_i = z_i \cap y$

---

<sup>(38)</sup> On pourrait espérer caractériser les treillis semi-modulaires de longueur finie par l'absence de certains sous-treillis en analogie avec la caractérisation des treillis modulaires et des treillis distributifs par ce moyen. Guidé par cette idée, j'ai pensé un moment que les treillis semi-modulaires de

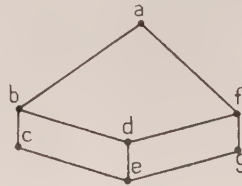


Fig. 52.

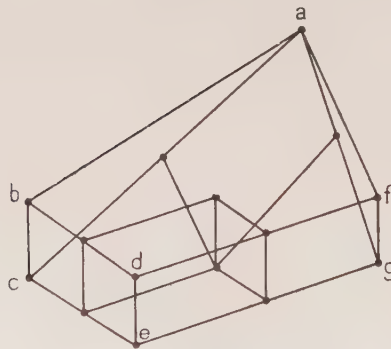


Fig. 53.

longueur finie ne possèdent pas de sous-treillis isomorphe au suivant (fig. 52), où  $d$  couvre  $e$  dans le treillis (et, par suite, où  $b$  couvre  $c$ , et  $f$  couvre  $g$ ). Il n'en est rien comme le montre l'exemple figure 53.

à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(J) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{z_i\}$  assurant l'obtention peut être choisie maximale.

(J<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale.

(L) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(M) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les mêmes hypothèses, la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale.

(M<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les mêmes hypothèses, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale.

(F) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ .

(B) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  <sup>(39)</sup>.

(β) Si la propriété précédente a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$ .

(γ) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  est maximale sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale sans répétition entre  $y$  et  $x \cup y$ .

(5)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$ .

(5a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$ .

(6)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z < z$ .

(6a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z < z$ .

(1)  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $x$  et  $y$ .

(2)  $x$  couvre  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $y$ .

(2b)  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $z \supseteq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$ .

(2c)  $x$  couvre  $x \cap z$  et  $z \supseteq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$ .

(3)  $x$  couvre  $y$  et  $z$  couvre  $t \Rightarrow [(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$ .

(α<sub>1</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est sans répétition.

(α<sub>2</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : l'application  $x' \rightarrow x' \cup y$  du sous-treillis  $[x \cap y, x]$  dans le sous-treillis  $[y, x \cup y]$  est biunivoque.

(α<sub>3</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le

<sup>(39)</sup> Les conditions (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>), (B<sub>3</sub>), (B<sub>4</sub>), (B<sub>5</sub>), (B<sub>6</sub>), (B<sub>7</sub>), ( $\bar{B}$ ), signalées à la fin du Chapitre I, équivalent évidemment aussi à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

est caractérisé par l'ensemble de ses éléments  $z$  tels que  $x \cap y \leq z < y$  : c'est l'ensemble des éléments  $t$  tels qu'il existe  $z$  avec  $t \leq z$ . Montrons que  $\alpha \cup (x)$  couvre  $\alpha$ . Soit  $\mathfrak{u}$  un idéal tel que l'on ait :  $\alpha \cup (x) > \mathfrak{u} \geq \alpha$ . L'idéal  $\alpha \cup (x)$  est l'ensemble des éléments  $t$  tels qu'il existe  $z$  avec  $t \leq z \cup x$ . Il existe, dans l'idéal  $\alpha \cup (x)$ , un élément  $v$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{u}$ . Soit  $z_1$  l'élément  $z$  tel que l'on ait  $v \leq z_1 \cup x$ . L'élément  $z_1 \cup x$  appartient à  $\alpha \cup (x)$  et n'appartient pas à  $\mathfrak{u}$ . Soit maintenant  $u$  un élément quelconque de l'idéal  $\mathfrak{u}$ . On a  $u \in \alpha \cup (x)$ . Il existe donc un élément  $z$ , soit  $z_2$ , tel que  $u \leq z_2 \cup x$ . On a  $u \leq z_1 \cup z_2 \cup x$  avec  $z_1 \cup z_2 \in \alpha$  et  $z_1 \cup z_2 \cup x \notin \mathfrak{u}$ . On a aussi  $z_1 \cup z_2 \leq u \cup z_1 \cup z_2 \leq z_1 \cup z_2 \cup x$  avec  $u \cup z_1 \cup z_2 \in \mathfrak{u}$ , car  $z_1 \cup z_2 \in \alpha \leq \mathfrak{u}$ . On en déduit  $u \cup z_1 \cup z_2 \neq z_1 \cup z_2 \cup x$ . Or, d'après le choix du couple  $(x, y)$ ,  $z_1 \cup z_2 \cup x$  couvre  $z_1 \cup z_2$ . On a donc  $u \cup z_1 \cup z_2 = z_1 \cup z_2$ , d'où  $u \leq z_1 \cup z_2$  et  $u \in \alpha$ . Finalement  $\mathfrak{u} = \alpha$  et  $\alpha \cup (x)$  couvre  $\alpha$ . Le treillis  $L_i$  ne satisfait pas à la propriété (1) : on a  $\alpha[\alpha \cup (x)] \cap (y) = \alpha$ , car  $(y)$  couvre  $\alpha$  et  $\alpha \cup (x) \not\geq (y)$  [en effet, on a  $y \notin \alpha \cup (x)$ , puisqu'il n'existe aucun élément  $z$  tel que  $y \leq z \cup x$ ,  $z \cup x$  couvrant  $z$ ]; on a

$$[\alpha \cup (x)] \cup (y) = (x \cup y);$$

il existe un idéal principal  $(r)$  tel que  $(y) < (r) < (x \cup y)$ . Le treillis  $L$  ne satisfait pas à la condition (1<sub>i</sub>) et l'on a (1<sub>i</sub>)  $\Rightarrow$  (2).

7° (2<sub>i</sub>)  $\Rightarrow$  (α) : Soit un treillis  $L$  ne satisfaisant pas à la condition (α). Soit  $(x, y)$  un couple d'éléments minimal parmi ceux qui ne possèdent pas la

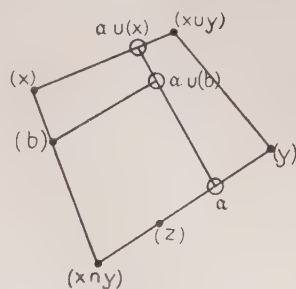


Fig. 32.

propriété α, alors que le couple symétrique la possède. Soit  $\alpha$  un idéal tel que  $(x \cap y) \leq \alpha < (y)$  et  $(y)$  couvre  $\alpha$ . Cet idéal est caractérisé par l'ensemble de ses éléments  $z$  tels que  $x \cap y \leq z < y$  : c'est l'ensemble des éléments  $t$  tels qu'il existe  $z$  avec  $t \leq z$ . Pour tout élément  $z$ , on a  $(z \cup x) \cap y = z$ . D'autre part, il existe un élément  $b$  entre  $x \cap y$  et  $x$  tel que  $(b \cup y) \cap x > b$ . D'après le choix du couple  $(x, y)$ , on a nécessairement  $b \cup y = x \cup y$  et  $x$  couvre  $b$ . De plus, on a, quel que soit  $z$ ,  $b \cup z \neq x \cup z$ , sans quoi le couple  $(x, z)$  ne posséderait pas la propriété α, alors que le couple  $(z, x)$  la possède évidemment, contrairement au choix du couple  $(x, y)$ . Ceci posé, considérons les idéaux  $\alpha \cup (x)$ , ensemble des éléments  $t$  tels qu'il existe  $z$  avec  $t \leq z \cup x$  et  $\alpha \cup (b)$ , ensemble des éléments  $t$  tels qu'il existe  $z$  avec  $t \leq z \cup b$ .

On a

$$(x \cup \gamma) > \alpha \cup (x) > \alpha \cup (b)$$

car, d'une part, on a  $\gamma \in (x \cup \gamma)$  et  $\gamma \notin \alpha \cup (x)$  [il n'existe aucun élément  $z$  tel que  $\gamma \leq z \cup x$ , puisque le couple  $(\gamma, x)$  possède la propriété  $a$ ]; d'autre part, on a  $x \in \alpha \cup (x)$  et  $x \notin \alpha \cup (b)$  (il n'existe aucun élément  $z$  tel que  $x \leq z \cup b$ , ce qui entraînerait  $z \cup x = z \cup b$ , contrairement à la remarque qui précède). Le treillis  $L_i$  ne satisfait pas à la condition (2) : on a  $[\alpha \cup (b)] \cap (\gamma) = \alpha$ , car  $(\gamma)$  couvre  $\alpha$  et  $(\gamma) \not\leq \alpha \cup (b)$ ; on a  $[\alpha \cup (b)] \cup (\gamma) = (x \cup \gamma)$  et  $(x \cup \gamma)$  ne couvre pas  $\alpha \cup (b)$ . Donc, le treillis  $L$  ne satisfait pas à la condition (2<sub>i</sub>) et l'on a (2<sub>i</sub>)  $\Rightarrow$  ( $\alpha$ ).

*b. Indication des contre-exemples (2<sup>b</sup>) :*

1° ( $\alpha_i$ )  $\not\Rightarrow$  (I) : C8.

2° (R)  $\not\Rightarrow$  (I<sub>i</sub>), (I) : C9, C8.

3° (I)  $\not\Rightarrow$  (I<sub>i</sub>), (S) : C9, C5.

4° (S)  $\not\Rightarrow$  ( $\gamma$ ) : C2.

5° ( $\gamma$ )  $\not\Rightarrow$  (I), ( $\beta$ ) : C4.

6° ( $\beta$ )  $\not\Rightarrow$  (I) : C3.

7° (I)  $\not\Rightarrow$  ( $\beta$ ) : C1.

4. ÉTUDE DES CONTRE-EXEMPLES UTILISÉS (32). — *a. Treillis ne satisfaisant à aucune condition de chaîne.*

1° A4 : Dans ce diagramme, les traits terminés de chaque côté par une double flèche symbolisent la chaîne des nombres réels  $r$  tels que  $0 < r < 1$ . Les éléments du treillis sont ainsi ceux des trois chaînes  $\{x_r\}$ ,  $\{y_r\}$ ,  $\{z_r\}$ , auxquels il faut ajouter les éléments  $a, b, c, d, e$ . Les relations imposées sont lisibles sur le diagramme (on a  $x_r \leq y_{r'}$  et  $z_r \leq y_{r'}$  si les nombres  $r$  et  $r'$  satisfont aux mêmes relations avec leur sens ordinaire). On a bien affaire à un treillis dans lequel on a  $a \cap c = e$ ,  $a \cup c = b$ ,  $a \cap d = e$ ,  $a \cup d = b$ ,  $c \cap d = e$ ,  $c \cup d = b$ ;  $a \cap y_r = x_r$ ,  $a \cup y_r = b$ ,  $a \cap z_r = e$ ,  $a \cup z_r = b$ ,  $c \cap y_r = z_r$ ,  $c \cup y_r = b$ ,  $c \cap x_r = e$ ,  $c \cup x_r = b$ ,  $d \cap x_r = e$ ,  $d \cup x_r = y_r$ ,  $d \cap z_r = e$ ,  $d \cup z_r = y_r$ ;  $x_r \cap y_{r'} = x_{\min(r, r')}$ ,  $x_r \cup y_{r'} = y_{\max(r, r')}$ ,  $x_r \cap z_{r'} = e$ ,  $x_r \cup z_{r'} = b$ ,  $y_r \cap z_{r'} = z_{\min(r, r')}$ ,  $y_r \cup z_{r'} = y_{\max(r, r')}$ . On s'assure facilement que ce treillis est complet : une famille quelconque d'éléments admet un plus grand minorant qu'on obtient en remplaçant d'abord les éléments de la famille appartenant à la chaîne  $\{x_r\}$  (s'il en existe) par leur plus grand minorant et en faisant de même pour ceux des deux autres chaînes; on voit de la même façon que toute famille d'éléments admet un plus petit majorant. On obtient le treillis des idéaux en remplaçant chacune des trois chaînes  $\{x_r\}$ ,

(32) Tous les contre-exemples utilisés sont des treillis complets.

$\{y_r\}, \{z_r\}$  par la chaîne de ses idéaux (avec des relations évidentes entre les éléments des chaînes d'idéaux). On obtient de même le treillis des idéaux duaux en remplaçant les chaînes par les chaînes d'idéaux duaux. Le treillis A4

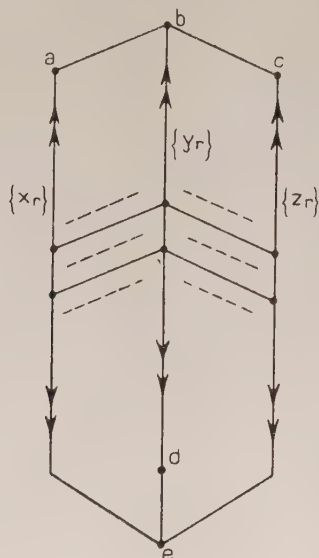


Fig. 33.

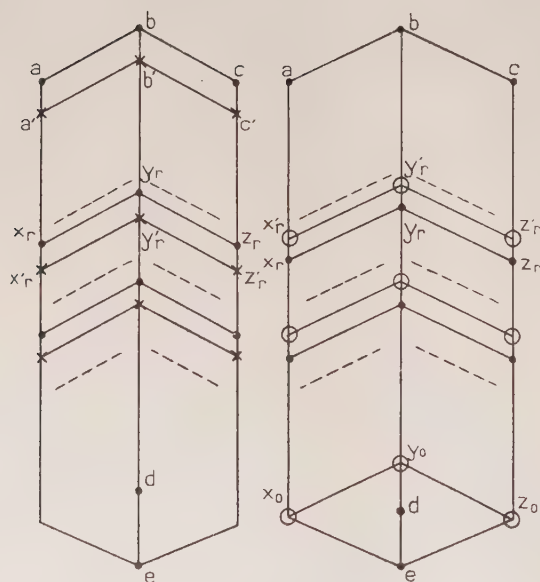


Fig. 34.

satisfait à la condition (R) : on le voit en remarquant que les couples d'éléments  $(a, c), (a, d), (c, d), (a, y_r), (a, z_r), (c, y_r), (c, x_r), (d, x_r), (d, z_r), (x_r, y_r), (x_r, z_r), (y_r, z_r)$  vérifient la propriété  $r$ . Il satisfait à la condition (B), car les mêmes couples et les couples symétriques vérifient la propriété  $b$ . Il satisfait à

la condition  $(\alpha_i)$  : le treillis de ses idéaux satisfait à la condition  $(\alpha)$ , car les couples d'éléments  $(a, b')$ ,  $(a, \gamma_r)$ ,  $(a, \gamma'_r)$ ,  $(a, d)$ ,  $(a', \gamma_r)$ ,  $(a', \gamma'_r)$ ,  $(a', d)$ ,  $(x_r, \gamma_r)$ ,  $(x_r, \gamma'_r)$ ,  $(x'_r, \gamma_r)$ ,  $(x'_r, \gamma'_r)$ , et les couples symétriques ainsi que les couples du diagramme symétriques de ceux-là par rapport à la chaîne médiane vérifient la propriété  $a$ , alors que les couples  $(a, c)$ ,  $(a, c')$ ,  $(a, z_r)$ ,  $(a, z'_r)$ ,  $(a', c)$ ,  $(a', c')$ ,  $(a', z_r)$ ,  $(a', z'_r)$ ,  $(x_r, c)$ ,  $(x_r, c')$ ,  $(x_r, z_r)$ ,  $(x_r, z'_r)$ ,  $(x'_r, c)$ ,  $(x'_r, c')$ ,  $(x'_r, z_r)$ ,  $(x'_r, z'_r)$  et les couples symétriques ne la vérifient pas. Il satisfait à la condition  $(\alpha^i)$  : le treillis de ses idéaux duaux satisfait à la condition  $(\alpha)$ , car les couples d'éléments  $(a, \gamma'_r)$ ,  $(a, \gamma_r)$ ,  $(a, \gamma_0)$ ,  $(a, d)$ ,  $(a, z_0)$ ,  $(x'_r, \gamma'_r)$ ,  $(x'_r, \gamma_r)$ ,  $(x'_r, \gamma_0)$ ,  $(x'_r, d)$ ,  $(x'_r, z_0)$ ,  $(x_r, \gamma'_r)$ ,  $(x_r, \gamma_r)$ ,  $(x_r, \gamma_0)$ ,  $(x_r, d)$ ,  $(x_r, z_0)$ ,  $(x_0, d)$ ,  $(x_0, z_0)$  et les couples symétriques ainsi que les couples du diagramme symétriques de ceux-là par rapport à la chaîne médiane vérifient la propriété  $a$ , alors que les couples  $(a, c)$ ,  $(a, z'_r)$ ,  $(a, z_r)$ ,  $(x'_r, c)$ ,  $(x'_r, z'_r)$ ,  $(x'_r, z_r)$ ,  $(x_r, c)$ ,  $(x_r, z'_r)$ ,  $(x_r, z_r)$  et les couples symétriques ne la vérifient pas. Il ne satisfait pas à la condition (J) : le couple  $(a, c)$  ne vérifie pas la propriété  $j$ , car la chaîne  $\{(e, e) < (x_r, z_r) < (a, c)\}$  ( $r$  décrivant la chaîne des nombres réels de l'intervalle ouvert  $[0, 1]$ ) maximale dans le produit cardinal  $[e, a] \times [e, c]$  peut être obtenue seulement à partir de la chaîne  $\{e < \gamma_r < b\}$  ou à partir de la chaîne  $\{d < \gamma_r < b\}$ , toutes deux non maximales entre  $e$  et  $b$ .

Le treillis A4 satisfait donc aux conditions (R), (S), (L), (B),  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (M), (6), (2), (1), (3),  $(\alpha^i)$ ,  $(\alpha_i)$ ,  $(2_i)$ ,  $(2^i)$ ,  $(1_i)$ ,  $(1^i)$ , (5). Il ne satisfait pas aux conditions (I), (F),  $(J_1)$ , (J).

2° A5 : Le treillis A5 est formé des éléments  $a, b, c, d$  et des deux chaînes

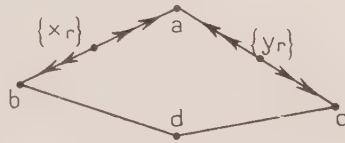


Fig. 35.

$\{x_r\}$  et  $\{y_r\}$  (des nombres réels  $r$  de l'intervalle ouvert  $[0, 1]$ ). Il est immédiat qu'il s'agit bien d'un treillis. Ce treillis est complet. Il satisfait aux conditions  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  car, quel que soit l'élément  $x$  pris dans l'une des deux chaînes joignant  $d$  et  $a$  et quel que soit l'élément  $y$  pris dans l'autre, le couple  $(x, y)$  ne vérifie pas la propriété  $b$  ( $x$  et  $y$  étant différents de  $a$  et  $d$ ), ni *a fortiori* la propriété  $c$ . Il satisfait à la condition (3) : en effet, pour avoir  $x$  couvrir  $y$  et  $z$  couvrir  $t$ , il faut prendre  $x = b, y = d, z = c, t = d$  ou  $x = z = b, y = t = d$  (ou les éléments du diagramme symétriques par rapport à la droite  $ad$ ). Dans les deux cas, on a  $[(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$ . Il ne satisfait pas à la condition (1),  $b$  et  $c$  couvrant  $d$  sans que  $a$  couvre  $b$  et  $c$ .

Le treillis A5 satisfait donc aux conditions  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (3). Il ne satisfait pas

aux conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J<sub>1</sub>), (α), (M), (J), (6), (2), (1), (α'), (α<sub>i</sub>), (2<sub>i</sub>), (2<sup>i</sup>), (1<sub>i</sub>), (1<sup>i</sup>), (5).

*b. Treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante.*

1° B<sub>1</sub> : Dans ce diagramme et dans tous les suivants, les traits terminés d'un côté par une flèche symbolisent la chaîne des nombres entiers positifs. Les éléments du treillis sont ceux des deux chaînes {a<sub>i</sub>} et {b<sub>j</sub>} et les éléments a, b, c. On voit immédiatement qu'il s'agit d'un treillis complet, car deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant [voir la note (29)]. Ce treillis satisfait à la condition (2) comme il est facile de s'en assurer. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a' et b'. Le treillis B<sub>1</sub> ne satisfait pas à la condition (1<sup>i</sup>), car a' et c couvrent a et b' ne couvre pas c. Il ne

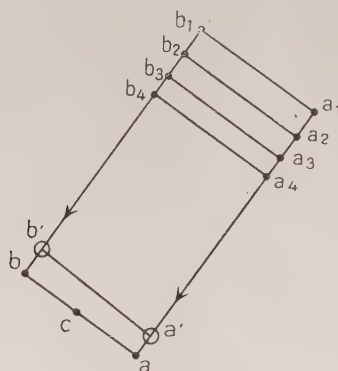


Fig. 36.

satisfait pas à la condition (J) : le couple (c, a) ne vérifie pas la propriété j, car la chaîne {(a, a) < (c, a) < (c, a<sub>i</sub>)} (i décroissant jusqu'à 1) maximale dans le produit cardinal [a, c] × [a, a<sub>1</sub>] peut être obtenue seulement à partir de la chaîne {a < c < b<sub>i</sub>} ou à partir de la chaîne {a < b < b<sub>i</sub>} et ces chaînes ne sont pas maximales entre a et b<sub>1</sub>. Il ne satisfait pas à la condition (γ), car le couple (c, a<sub>1</sub>) vérifie la propriété c et le couple (a<sub>1</sub>, c) ne la vérifie pas. Il ne satisfait pas à la condition (α), car le couple (a<sub>1</sub>, b) vérifie la propriété a et le couple (b, a<sub>1</sub>) ne la vérifie pas.

Le treillis B<sub>1</sub> satisfait donc aux conditions (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α'), (R), (I), (F), (2<sup>i</sup>), (B), (J), (1<sup>i</sup>), (5), (α), (γ), (β), (6).

2° B<sub>2</sub> : Les éléments du treillis B<sub>2</sub> sont ceux des trois chaînes {a<sub>i</sub>}, {b<sub>j</sub>}, {c<sub>k</sub>} et les éléments a et c. Deux éléments quelconques admettant un plus petit majorant, il s'agit bien d'un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (J) : il est évident qu'un couple d'éléments auquel n'appartient pas c vérifie la propriété j et l'on s'assure facilement qu'il en est de même des couples (c, a<sub>i</sub>) et (c, b<sub>j</sub>). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a',

$b'$ ,  $c'$ . Le treillis  $B_2$  ne satisfait pas à la condition  $(1^i)$ , car  $a'$  et  $c$  couvrent  $a$  et  $c'$  ne couvre pas  $a'$ . Il ne satisfait pas à la condition  $(2)$ , car  $c$  couvre  $a = c \cap a$ , et  $c_1 = c \cup a_1$  ne couvre pas  $a_1$ .

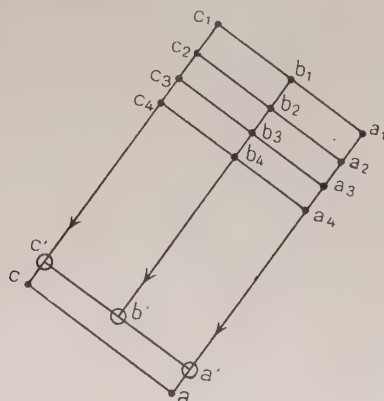


Fig. 37.

Le treillis  $B_2$  satisfait donc aux conditions  $(J)$ ,  $(1)$ . Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha^i)$ ,  $(R)$ ,  $(I)$ ,  $(F)$ ,  $(2^i)$ ,  $(B)$ ,  $(1^i)$ ,  $(5)$ ,  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ ,  $(6)$ ,  $(2)$ .

3°  $B_3$  : Les éléments du treillis  $B_3$  sont ceux des deux chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$  et les éléments  $c$  et  $d$ . Il est immédiat qu'il s'agit d'un treillis complet. Le treillis  $B_3$  satisfait à la condition  $(R)$  car, quels que soient  $a_i$  et  $b_j$ , toute chaîne du produit  $[a_i, c] \times [b_j, c]$  est finie et ne saurait donner une chaîne maximale entre  $d$  et  $c$ , ce qui montre que le couple  $(a_i, b_j)$  vérifie la propriété  $r$ . Le treillis des idéaux duaux est obtenu en ajoutant les éléments  $a'$  et  $b'$ . Le treillis  $B_3$  ne satisfait pas à la condition  $(1^i)$ , car  $a'$  et  $b'$  couvrent  $d$  sans que  $c$  couvre

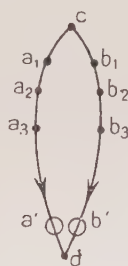


Fig. 38.

$a'$  et  $b'$ . Il ne satisfait pas à la condition  $(\beta)$ , car le couple  $(a_1, b_2)$  ne vérifie pas la propriété  $b$  alors que le couple  $(b_2, a_1)$  la vérifie. Il ne satisfait pas à la condition  $(6)$ , car on a  $a_1 \cap b_1 = a_1 \cap b_2 = d$ ,  $a_1 \cup b_1 = a_1 \cup b_2 = c$ , alors que tout élément  $x$  tel que  $d < x \leq a_1$  est tel que  $x \cup b_2 = c$ , donc tel que  $(x \cup b_2) \cap b_1 = c \cap b_1 = b_1$ .

Le treillis B3 satisfait donc aux conditions (R), (I), (J), ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions ( $\alpha^i$ ), (F), (2'), (B), (1'), (5), ( $\beta$ ), (6).

4° B4 : Les éléments du treillis B4 sont ceux des trois chaînes  $\{a_i\}$ ,  $\{b_j\}$ ,  $\{c_k\}$  et les éléments  $b$  et  $d$ . C'est un treillis complet, car deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. Ce treillis satisfait à la condition (R) : les couples d'éléments  $(a_i, b_j)$ ,  $(a_i, c_k)$ ,  $(b_j, c_k)$ ,  $(a_i, b)$ ,  $(b, c_k)$  vérifient la propriété  $r$ . Il satisfait à la condition (B); les mêmes couples d'éléments et les couples symétriques vérifient la propriété  $b$ . On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . Ce treillis satisfait à la condition ( $\alpha$ ), car les couples  $(a_i, b_j)$ ,  $(b_j, c_k)$ ,  $(a_i, b)$ ,  $(b, c_k)$ ,  $(a_i, b')$ ,  $(b', c_k)$ ,  $(a_i, c')$ ,  $(a', c_k)$ ,  $(a', b)$ ,  $(b, c')$ ,  $(a', c')$  et les couples symétriques vérifient la

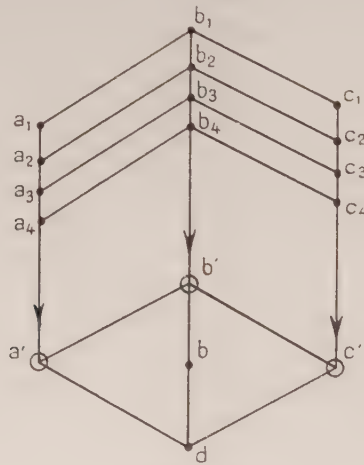


Fig. 39.

propriété  $a$ , alors que les couples  $(a_i, c_k)$  et les couples symétriques ne la vérifient pas. Le treillis B4 satisfait donc à la condition ( $\alpha^i$ ). Il ne satisfait pas à la condition (F); le couple  $(a_1, c_1)$  ne vérifie pas la propriété  $f$ , car la chaîne

$$\{ (d, d) < \dots < (a_i, c_i) < (a_i, c_{i-1}) < (a_{i-1}, c_{i-1}) < \dots < (a_2, c_2) < (a_2, c_1) < (a_1, c_1) \}$$

maximale dans le produit cardinal  $[d, a_1] \times [d, c_1]$  donne la chaîne

$$\{ d \cup d = d = \dots = a_i \cup c_i = b, \leq a_i \cup c_{i-1} = b, \leq \dots \leq a_2 \cup c_1 = b, \leq a_1 \cup c_1 = b, \}$$

non maximale entre  $d$  et  $b$ , puisqu'on peut y intercaler l'élément  $b$ .

Le treillis B4 satisfait donc à toutes les conditions étudiées, sauf à la condition (F).

5° B6 : Les éléments du treillis B6 sont ceux des chaînes  $\{a_n\}$ ,  $\{a_{1n}\}$ ,  $\{a_{2n}\}$ ,  $\{a_{3n}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ ,  $\{c_{1n}\}$ ,  $\{c_{2n}\}$ ,  $\{c_{3n}\}$ ,  $\dots$  et les éléments  $a$  et  $c$ . On voit que c'est un treillis complet en s'assurant que deux éléments quelconques ont un



dante. On voit sans difficulté que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. Le diagramme représente donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition ( $\beta$ ) : on peut, en effet, constater que les couples d'éléments  $(a_{ijk}, a_{i'jk'})$ ,  $(a_{ijk}, b_{i'jk'})$ ,  $(a_{ijk}, c_{i'jk'})$ ,  $(a_{ijk}, d_{i'jk'})$ ,  $(b_{ij}, b_{i'j'})$ ,  $(c_{ijk}, c_{i'jk'})$ ,  $(c_{ijk}, d_{i'jk'})$ ,  $(d_{ij}, d_{i'j'})$  et les couples symétriques vérifient la propriété  $b$ , alors

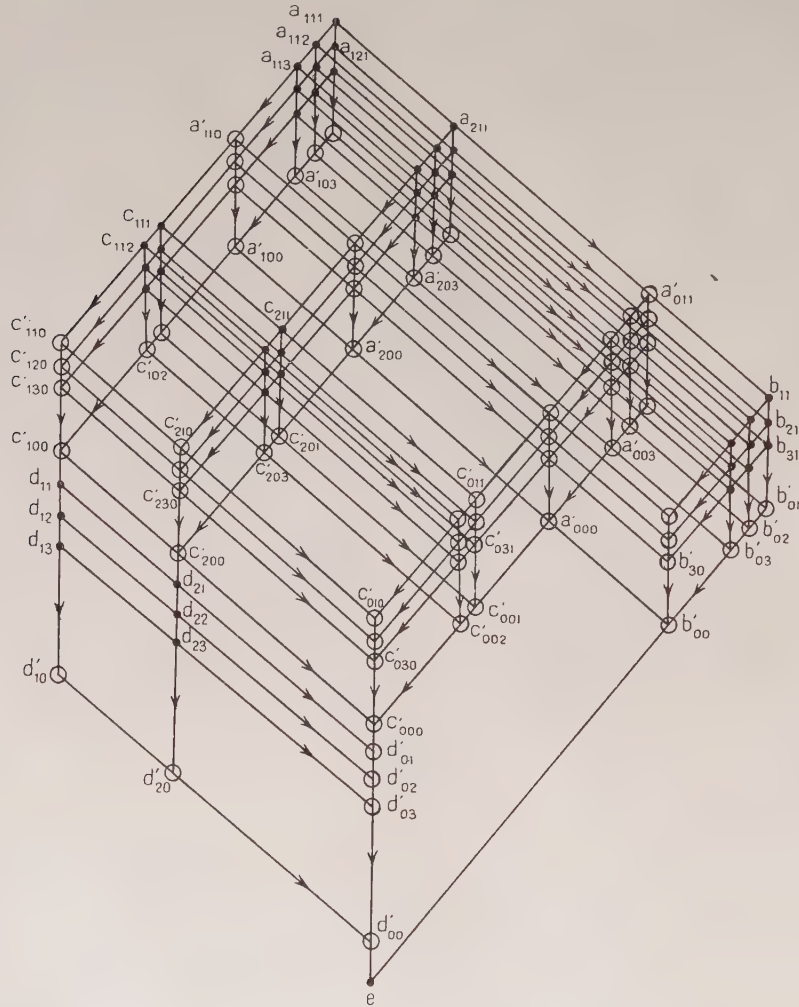


Fig. 41.

que les couples  $(b_{ij}, c_{i'jk'})$ ,  $(b_{ij}, d_{i'jk'})$  et les couples symétriques ne la vérifient pas. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'_{0jk}$ ,  $a'_{ij0}$ ,  $a'_{i0k}$ ,  $a'_{00k}$ ,  $a'_{0j0}$ ,  $a'_{i00}$ ,  $a'_{000}$ ,  $b'_{0j}$ ,  $b'_{i0}$ ,  $b'_{00}$ ,  $c'_{0jk}$ ,  $c'_{ij0}$ ,  $c'_{i0k}$ ,  $c'_{00k}$ ,  $c'_{0j0}$ ,  $c'_{i00}$ ,  $c'_{000}$ ,  $d'_{0j}$ ,  $d'_{i0}$ ,  $d'_{00}$ . Le treillis Bg ne satisfait pas à la condition ( $\Gamma^i$ ), car  $b'_{00}$ , et  $d'_{00}$  couvrent  $e$  sans que  $a'_{000}$  couvre  $d'_{00}$ . Il ne satisfait pas à la condition ( $\alpha$ ), car le couple  $(b_{11}, d_{11})$  possède la propriété  $a$  que ne possède pas le couple  $(d_{11}, b_{11})$ . Il ne satisfait pas à la condition (J), car le couple  $(b_{11}, c_{112})$  ne

vérifie pas la propriété  $j$ ; en effet, la chaîne  $\{(e, e) < (e, d_{1j}) < (e, c_{11k}) < (b_{1j'}, c_{112})\}$  ( $j$  et  $j'$  décroissant jusqu'à 1,  $k$  décroissant jusqu'à 2) maximale dans le produit cardinal  $[e, b_{11}] \times [e, c_{112}]$  peut être obtenue seulement à partir de la chaîne  $\{e < d_{1j} < c_{11k} < a_{11j'}\}$  ou à partir de la chaîne déduite de celle-là en remplaçant  $c_{112}$  par  $c_{111}$  et ces deux chaînes sont non maximales entre  $e$  et  $a_{112}$ .

Le treillis B9 satisfait donc aux conditions  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ ,  $(2)$ ,  $(1)$ . Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha^i)$ ,  $(R)$ ,  $(I)$ ,  $(F)$ ,  $(2^i)$ ,  $(B)$ ,  $(J)$ ,  $(1^i)$ ,  $(5)$ ,  $(\alpha)$ ,  $(6)$ .

7° B11 : Les éléments du treillis B11 sont  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $a_{0j}$ ,  $a_{i0}$ ,  $b_{0j}$ ,  $b_{i0}$ ,  $b_{00}$ , où

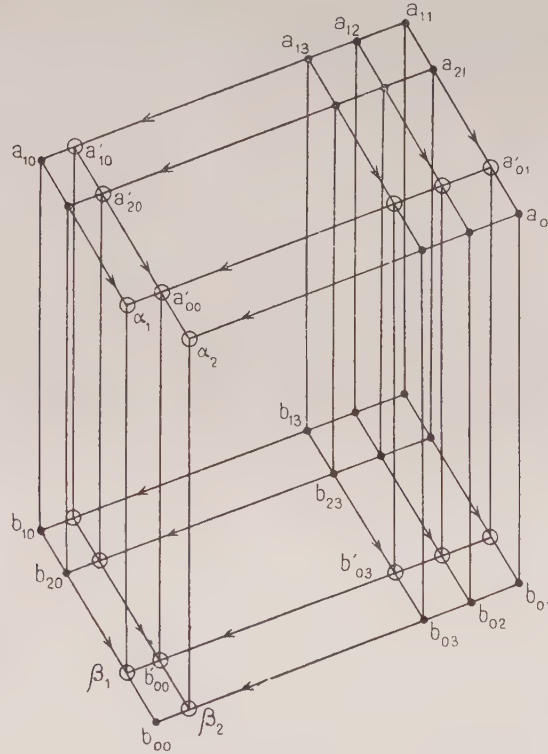


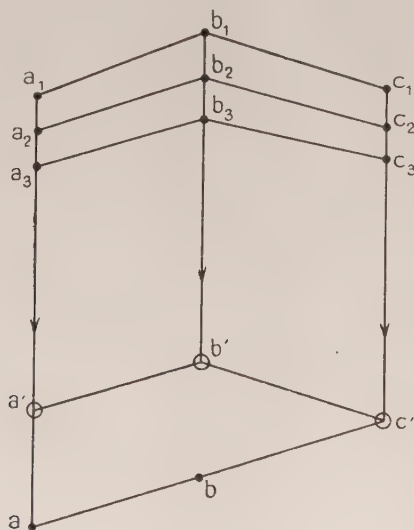
Fig. 42.

les indices sont des entiers positifs quelconques. On voit facilement que c'est bien un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'_{i0}$ ,  $a'_{0j}$ ,  $a'_{00}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $b'_{i0}$ ,  $b'_{0j}$ ,  $b'_{00}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Le treillis des idéaux satisfait à la condition  $(\alpha)$ : les seuls couples d'éléments ne possédant pas la propriété  $a$  sont les couples  $(a_{i0}, a_{0j})$ ,  $(a_{i0}, \alpha_2)$ ,  $(\alpha_1, a_{0j})$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et les couples symétriques. Le treillis B11 satisfait donc à la condition  $(\alpha^i)$ . Il ne satisfait pas à la condition  $(\gamma)$ : le couple  $(b_{10}, a_{01})$  possède la propriété  $c$  et le couple  $(a_{01}, b_{10})$  ne la possède pas, car la chaîne  $\{b_{00} < a_{0j}\}$  (où  $j$  décroît jusqu'à 1) est maximale sans répétition entre  $b_{00}$  et  $a_{01}$ , alors que la chaîne  $\{b_{10} < a_{1j}\}$  n'est pas maximale entre  $b_{10}$  et  $a_{11}$ . Il ne satisfait pas à la condi-

tion (J) : le couple  $(a_{0i}, b_{10})$  ne vérifie pas<sup>33</sup> la propriété  $j$ , car la chaîne  $\{(b_{00}, b_{00}) < (b_{i0}, b_{00}) < (b_{10}, a_{0j})\}$  (où  $i$  et  $j$  décroissent jusqu'à 1) maximale dans le produit cardinal  $[b_{00}, b_{10}] \times [b_{00}, a_{01}]$  peut être obtenue seulement à partir de la chaîne  $\{b_{00} < b_{i0} < a_{1j}\}$  ou à partir de la chaîne déduite de celle-là en remplaçant  $b_{10}$  par  $a_{10}$  et ces deux chaînes sont non maximales entre  $b_{00}$  et  $a_{11}$ .

Le treillis B11 satisfait donc aux conditions  $(\alpha^i)$ ,  $(2^i)$ ,  $(1^i)$ , (5),  $(\alpha)$ , (6), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (R), (I), (F), (B), (J),  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ .

8° B13 : Les éléments du treillis B13 sont ceux des trois chaînes  $\{a_i\}$ ,  $\{b_j\}$ ,  $\{c_k\}$  et les éléments  $a$  et  $b$ . On voit immédiatement que c'est un treillis complet. Il satisfait à la condition (R) : on voit aisément que les couples d'éléments  $(a_i, b_j)$ ,  $(a_i, c_j)$ ,  $(a_i, b)$ ,  $(b_i, c_j)$  possèdent la propriété  $r$ . Il satisfait à la condi-



tion (F) : les mêmes couples vérifient la propriété  $f$ . On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . Celui-ci ne satisfaisant pas à la condition (1), car  $a'$  et  $b$  couvrent  $a$  sans que  $b'$  couvre  $b$ , le treillis B13 ne satisfait pas à la condition  $(1^i)$ . Il ne satisfait pas non plus à la condition (5), car on a  $a_1 \cap b = a_1 \cap c_1 = a$ ,  $a_1 \cup b = a_1 \cup c_1 = b_1$  et, pour tout élément  $x = a_i$  tel que  $a < x \leq a_1$ , on a  $(a_i \cup b) \cap c_1 = b_i \cap c_1 = c_i$ .

Le treillis B13 satisfait donc aux conditions (R), (I), (F), (B), (J),  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (6), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha^i)$ ,  $(2^i)$ ,  $(1^i)$ , (5).

9° B16<sup>(33)</sup> : Les éléments du treillis B16 sont ceux des deux chaînes  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$ , les éléments  $c_{ij}$ , où  $i, j$  sont des entiers positifs quelconques et les

<sup>(33)</sup> Les contre-exemples B16 et B14 sont directement inspirés d'un exemple de R. P. DILWORTH, [4], p. 349.

éléments  $a$  et  $b$ . On voit aisément que l'ensemble partiellement ordonné défini par le diagramme satisfait à la condition de chaîne ascendante et que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a donc bien un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'$  et  $b'$ . Celui-ci satisfait à la condition (1), donc le treillis B16 satisfait à la condition (1<sup>i</sup>). Le treillis B16 ne satisfait pas à la condition (2), car  $b$  couvre  $a = a_1 \cap b$  sans que  $b_1 = a_1 \cup b$  couvre  $a_1$ .

Parmi les conditions étudiées, les seules auxquelles satisfasse le treillis B16 sont donc les conditions (1<sup>i</sup>) et (1) [et la condition équivalente (1<sub>i</sub>)].

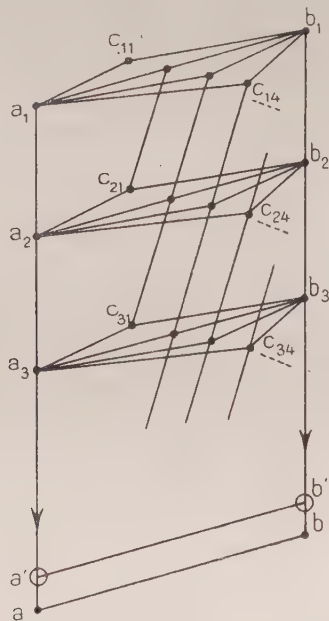


Fig. 44.

10° B14 : Les éléments du treillis B14 sont ceux des chaînes  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{d_n\}$ ,  $\{e_n\}$ ,  $\{g_n\}$ , les éléments  $c_{ij}$  et  $f_{ij}$ , où  $i$  et  $j$  sont des entiers positifs quelconques et l'élément  $a$ . Là aussi, on voit immédiatement que le diagramme représente un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a affaire à un treillis complet. Considérons deux éléments autres que  $a$  : ils appartiennent à un sous-treillis convexe  $[a_n, b_1]$  (il suffit de prendre pour  $n$  le maximum de l'indice des éléments à un seul indice et du premier indice des éléments à deux indices). Il en résulte que le treillis B14 possèdera toutes les propriétés (parmi celles qu'on étudie ici et autres que celles portant sur le treillis des idéaux duaux) de ces sous-treillis. Or, ceux-ci sont de longueur finie et possèdent la propriété (1). Ils possèdent donc toutes les propriétés envisagées (<sup>34</sup>). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments

(<sup>34</sup>) D'après leur équivalence dans les treillis de longueur finie, établie au Chapitre III.

$a'$ ,  $b'$ ,  $d'$ ,  $e'$ ,  $g'$ . Ce treillis ne satisfait pas à la condition (1), puisque  $b'$  et  $d'$  couvrent  $a'$ , alors que  $e'$  ne couvre pas  $d'$ .

Le treillis B14 possède donc toutes les propriétés étudiées, sauf les propriétés  $(\alpha^i)$ ,  $(2^i)$ ,  $(1^i)$ .

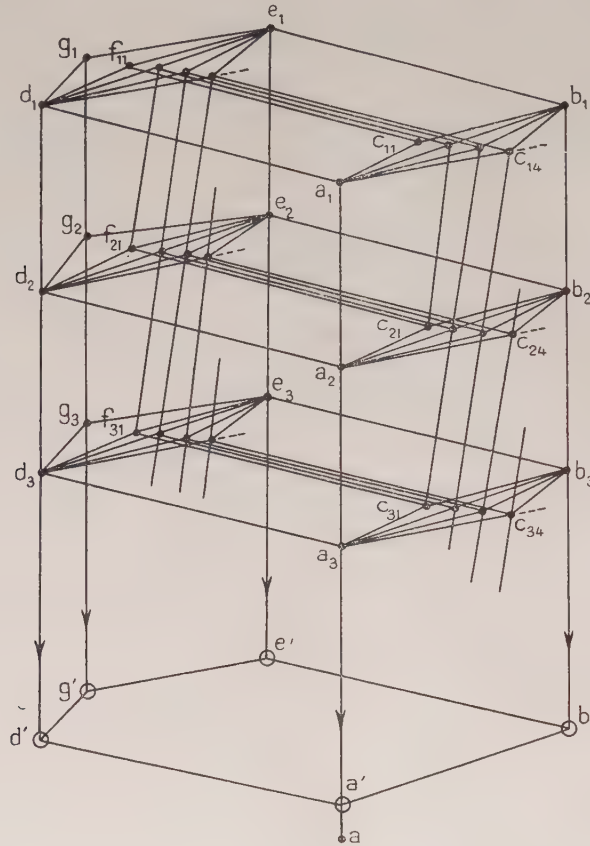


Fig. 45.

c. Treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante <sup>(35)</sup>.

1° C1 : Le treillis C1 est le treillis dual du treillis B1. Ce treillis satisfait à la

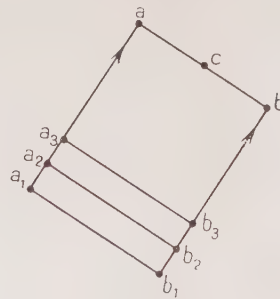


Fig. 46.

<sup>(35)</sup> Le contre-exemple C8 qui est modulaire sera étudié dans R. CROISOT [3], Chapitre I.

condition (1). Il ne satisfait pas à la condition ( $\gamma$ ), ni à la condition ( $\beta$ ), car le couple  $(b, a_1)$  vérifie la propriété  $c$ , donc aussi la propriété  $b$ , alors que le couple  $(a_1, b)$  ne les vérifie pas.

Le treillis  $C_1$  satisfait donc à la condition (1) [et à la condition ( $1^i$ )]; il ne satisfait à aucune autre condition étudiée.

2°  $C_2$  : Le treillis  $C_2$  est le treillis dual du treillis  $B_2$ . Le treillis de ses idéaux est donc dual du treillis des idéaux duaux du treillis  $B_2$ . Le treillis  $C_2$  satisfait à la condition (S) : on voit aisément que les couples  $(a_i, c)$  possèdent la propriété  $s$  (et aussi la propriété  $r$ ) et que les couples  $(b_j, c)$  possèdent également

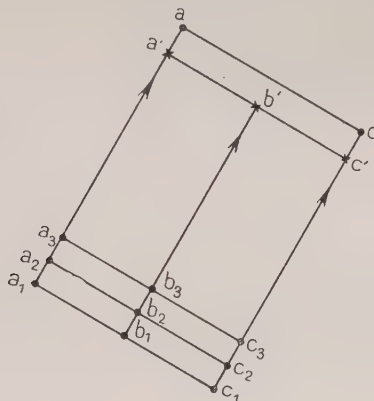


Fig. 47.

la propriété  $s$  (mais non la propriété  $r$ ); les autres couples vérifient trivialement la propriété  $s$  (et la propriété  $r$ ). Le treillis  $C_2$  ne satisfait pas à la condition ( $1_i$ ), car  $b'$  et  $c$  couvrent  $c' = b' \cap c$  sans que  $a = b' \cup c$  couvre  $b'$ . Il ne satisfait pas à la condition ( $\gamma$ ), car le couple  $(c, a_1)$  possède la propriété  $c$  que ne possède pas le couple  $(a_1, c)$ .

Le treillis  $C_2$  satisfait donc aux conditions (S), ( $\beta$ ), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions ( $\alpha_i$ ), (R), (I), ( $2_i$ ), (L), ( $1_i$ ), ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ).

3°  $C_3$  : Le treillis  $C_3$  est le treillis dual du treillis  $B_3$ . Il satisfait à la condi-

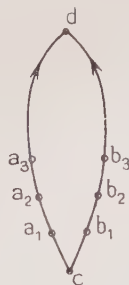


Fig. 48.

tion ( $\beta$ ) et à la condition ( $\gamma$ ), car aucun couple d'éléments  $(x, y)$  tel que l'on n'ait ni  $x \supseteq y$ , ni  $x \leq y$  ne possède la propriété  $b$ , ni par conséquent la pro-

priété  $c$ . Il ne satisfait pas à la condition (1), car  $a_1$  et  $b_1$  couvrent  $c$  sans que  $d$  couvre  $a_1$  et  $b_1$ .

Le treillis C3 satisfait donc aux conditions ( $\gamma$ ) et ( $\beta$ ) et seulement à celles-là.

4° C4 : Les éléments du treillis C4 sont ceux des trois chaînes  $\{a_i\}$ ,  $\{b_j\}$ ,  $\{c_k\}$  et les éléments  $a$  et  $b$ . L'ensemble partiellement ordonné défini par le diagramme satisfait à la condition de chaîne descendante et est tel que deux éléments quelconques possèdent un plus grand minorant ; c'est donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition ( $\gamma$ ) : les couples d'éléments  $(a_i, c_k)$  avec  $i \neq 1$ ,  $(b_j, c_k)$  avec  $j \neq 1$ ,  $(a, c_k)$  et les couples symétriques ne possèdent pas la propriété  $c$  ; tous les autres couples la possèdent. Le treillis C4 ne satis-

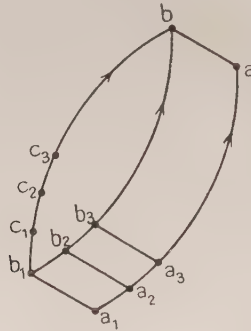


Fig. 49.

fait pas à la condition (1), car  $b_2$  et  $c_1$  couvrent  $b_1$  sans que  $b$  couvre  $b_2$  et  $c_1$ . Il ne satisfait pas à la condition ( $\beta$ ), car le couple  $(c_1, a)$  possède la propriété  $b$  et le couple  $(a, c_1)$  ne la possède pas.

Le treillis C4 satisfait donc uniquement à la condition ( $\gamma$ ) parmi les conditions étudiées.

5° C5 : Les éléments du treillis C5 sont  $a_{ijk}$ ,  $b_{ijk}$ ,  $a_{ijo}$ ,  $a_{ioh}$ , où les indices sont des entiers positifs quelconques (à part que l'on exclut les éléments de la forme  $b_{i11}$ ) et  $e$ . Le diagramme définit un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne descendante. On voit que deux éléments quelconques ont toujours un plus grand minorant. On a donc bien affaire à un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (L) : deux éléments de la forme  $a_{ijk}$  ou  $b_{ijk}$  appartiennent à un sous-treillis convexe de longueur finie vérifiant la condition (1), donc semi-modulaire, vérifiant donc aussi la condition (1) <sup>(34)</sup> ; il en résulte que les couples ainsi déterminés possèdent la propriété  $i$  ; on s'assure facilement qu'il en est de même des couples ayant un élément de la forme  $a_{ijo}$  ou  $a_{ioh}$  ou les deux. On obtient le treillis des idéaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'_{ijo}$ ,  $a'_{ioh}$ ,  $a'_{ioo}$ ,  $c'_i$ ,  $d'_i$ ,  $a'_{0jo}$ ,  $a'_{0oh}$ ,  $a'_{0oo}$ ,  $f'_i$ ,  $g'_i$ . Le treillis C5 ne satisfait pas à la condition ( $1_i$ ), car  $c'_i$  et  $d'_i$  couvrent  $a'_{ioo}$  sans que  $e$  couvre  $c'_i$  et  $d'_i$ . Il ne satisfait pas à la condition (S) : le couple  $(a_{101}, a_{110})$

ne possède pas la propriété  $s$ , car la chaîne  $\{a_{i11} < e\}$  ( $i$  croissant à partir de 1) maximale entre  $a_{i11}$  et  $e$  peut être obtenue à partir de la chaîne  $\{(a_{i01}, a_{i10}) < (e, e)\}$  du produit cardinal  $[a_{i01}, e][a_{i10}, e]$  et ne peut pas être obtenue à partir d'une chaîne maximale de ce produit cardinal.

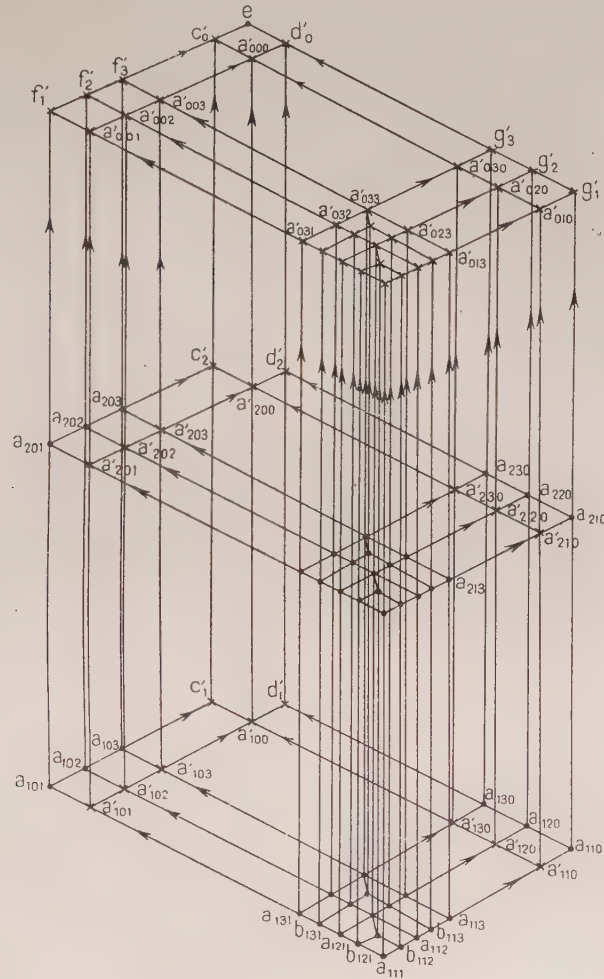


Fig. 50.

Le treillis C5 satisfait donc aux conditions (I), (L), ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ), ( $\beta$ ), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions ( $\alpha_i$ ), (R), ( $2_i$ ), (S), ( $1_i$ ).

6° C9 : Les éléments du treillis C9 sont  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $a_{i0}$ ,  $a_{0j}$ ,  $e_{ij}$ ,  $f_{ij}$ ,  $e_{i0}$ ,  $e_{0j}$ ,  $e$  (les indices sont des entiers positifs quelconques à part que l'on exclut les éléments  $b_{11}$  et  $f_{11}$ ). On voit facilement qu'il s'agit bien d'un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (R) et à la condition (I) : deux éléments de la forme  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $e_{ij}$  ou  $f_{ij}$  appartiennent à un sous-treillis convexe de longueur finie vérifiant

la condition (1), donc semi-modulaire et vérifiant les conditions (R) et (I) <sup>(34)</sup>; les couples d'éléments ainsi déterminés possèdent donc les propriétés  $r$  et  $i$ ; on voit aisément qu'il en est de même des couples ayant un ou deux éléments de l'une des formes  $a_{i0}, a_{0j}, e_{i0}, e_{0j}$ . On obtient le treillis des idéaux en ajoutant les éléments  $a'_{i0}, a'_{0j}, a'_{00}, e'_{i0}, e'_{0j}, e'_{00}, c', d', g', h'$ . Ce treillis ne satisfait pas à la condition (1), puisque  $c'$  et  $d'$  couvrent  $a'_{00}$  sans que  $e$  couvre  $c'$  et  $d'$ . Le treillis Cg ne satisfait donc pas à la condition (1<sub>i</sub>).

Finalement, le treillis Cg satisfait à toutes les conditions étudiées, sauf aux conditions  $(\alpha_i), (2_i), (1_i)$ .

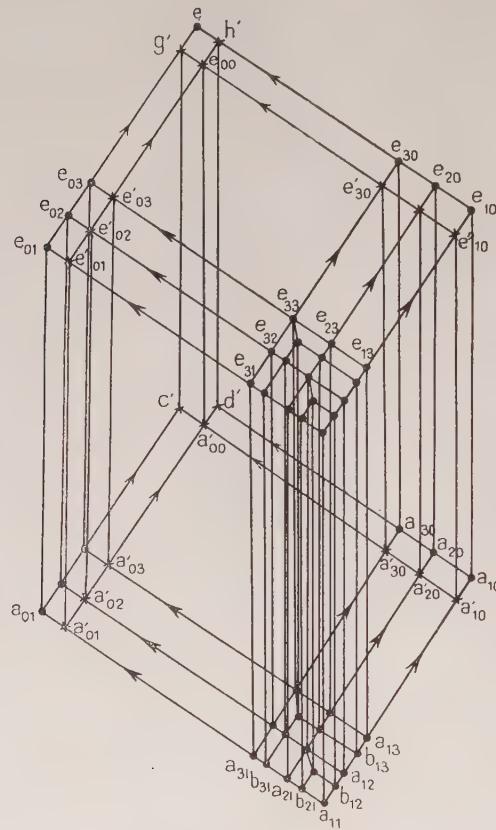


Fig. 51.

### CHAPITRE III.

#### APPLICATION A LA CARACTÉRISATION DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES DE LONGUEUR FINIE.

LEMME. — *Dans les treillis de longueur finie, toutes les conditions étudiées sont équivalentes.*

Démonstration. — Un treillis de longueur finie satisfait à la fois à la condition

de chaîne ascendante et à la condition de chaîne descendante <sup>(36)</sup>. Les théorèmes 2 et 3 du Chapitre II entraînent alors les conséquences suivantes :

D'après le théorème 2, les conditions (I), (L), (M) sont équivalentes, les conditions  $(2_i)$ , (2), (3) sont équivalentes. D'après le théorème 3, les conditions (J), (F), (B), (M), (2), (6), (5),  $(2^i)$ , (3) sont équivalentes. Il en résulte l'équivalence de toutes ces conditions. De plus, d'après le théorème 2, (L) entraîne  $(\alpha)$  et  $(\gamma)$ ; (B) entraîne  $(\beta)$  et l'une quelconque de ces conditions entraîne (2). Les conditions  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$  sont donc équivalentes aux précédentes. Il en est de même de la condition  $(\alpha_i)$  équivalente à  $(\alpha)$  d'après le théorème 2 et de la condition  $(\alpha^i)$ , également équivalente à  $(\alpha)$  d'après le théorème 3.

La condition (S) équivaut à la condition (R), d'après le théorème 2 et les conditions  $(1)$ ,  $(1_i)$ ,  $(1^i)$  sont équivalentes, d'après les théorèmes 2 et 3.

Puisque (R) entraîne (2) et que (2) entraîne (1), on établira l'équivalence totale des conditions étudiées en montrant que (1) entraîne (R).

Or, on sait <sup>(37)</sup> que la condition (1) caractérise la semi-modularité et que, dans un treillis semi-modulaire de longueur finie, la condition de chaîne de Jordan-Dedekind est vérifiée et, pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , les longueurs des chaînes maximales sans répétition joignant  $x \cap y$  à  $x$  d'une part,  $y$  à  $x \cup y$  d'autre part, sont liées par l'inégalité

$$\lg[x \cap y, x] \geq \lg[y, x \cup y].$$

Supposons alors que, dans un treillis de longueur finie satisfaisant à la condition (1), pour un couple d'éléments  $(x, y)$ , une chaîne  $\{z_i\}$  maximale sans répétition (de longueur  $l$ ) entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  soit obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ . Cette chaîne est évidemment sans répétition et sa longueur qui doit être  $l$  est inférieure ou égale à la longueur du produit cardinal dont elle est extraite. La longueur d'un produit cardinal étant égale à la somme des longueurs des treillis composants, on doit avoir

$$l \leq \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y].$$

Or,  $l$  n'est autre que  $\lg[x \cap y, x \cup y]$ . Tenant compte de l'inégalité précédente, on a donc

$$\begin{aligned} \lg[x \cap y, x \cup y] = l &\leq \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y] \\ &\leq \lg[x, x \cup y] + \lg[x \cap y, x] = \lg[x \cap y, x \cup y]. \end{aligned}$$

<sup>(36)</sup> Remarquons aussi qu'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition de chaîne descendante, ainsi qu'à une des conditions étudiées est semi-modulaire de longueur finie. Il suffit, d'après la démonstration du lemme, de montrer que ceci est vrai avec la condition (1). On montre pour cela que, si une chaîne de  $a$  à  $b$  est de longueur finie, toutes les chaînes de  $a$  à  $b$  ont même longueur (réurrence sur la longueur de la chaîne).

<sup>(37)</sup> G. BIRKHOFF [1], p. 100.

On en déduit  $l = \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y]$ , c'est-à-dire que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est nécessairement maximale. La condition (R) est vérifiée et l'équivalence des conditions étudiées est établie.

**THÉORÈME.** — *Un treillis de longueur finie est semi-modulaire si et seulement s'il satisfait à l'une quelconque des conditions suivantes* <sup>(38)</sup> :

(R) Pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments, si une chaîne  $\{z_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$  est obtenue sous la forme  $z_i = x_i \cap y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(S) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  assurant cette obtention peut être choisie maximale.

(S<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$  est maximale.

(I) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$  est obtenue sous la forme  $x_i = z_i \cap x, y_i = z_i \cap y$

<sup>(38)</sup> On pourrait espérer caractériser les treillis semi-modulaires de longueur finie par l'absence de certains sous-treillis en analogie avec la caractérisation des treillis modulaires et des treillis distributifs par ce moyen. Guidé par cette idée, j'ai pensé un moment que les treillis semi-modulaires de

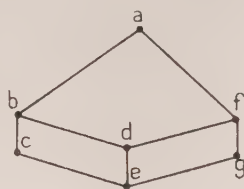


Fig. 52.

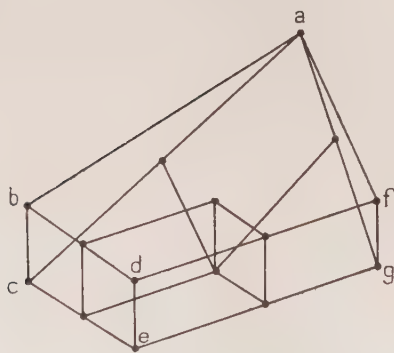


Fig. 53.

longueur finie ne possèdent pas de sous-treillis isomorphe au suivant (fig. 52), où  $d$  couvre  $e$  dans le treillis (et, par suite, où  $b$  couvre  $c$ , et  $f$  couvre  $g$ ). Il n'en est rien comme le montre l'exemple figure 53.

à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(J) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{z_i\}$  assurant l'obtention peut être choisie maximale.

(J<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les hypothèses précédentes, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale.

(L) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \cap y$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ , cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(M) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les mêmes hypothèses, la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale.

(M<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , avec les mêmes hypothèses, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale.

(F) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x \cup y$ .

(B) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  est maximale entre  $x \cap y$  et  $x$ , la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \cup y$  <sup>(39)</sup>.

(β) Si la propriété précédente a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$ .

(γ) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  est maximale sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est maximale sans répétition entre  $y$  et  $x \cup y$ .

(5)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$ .

(5a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z = x$ .

(6)  $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z < z$ .

(6a)  $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$  il existe  $t$  tel que  $y \cap z < t \leq y$  et  $(x \cup t) \cap z < z$ .

(1)  $x$  et  $y$  couvrent  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $x$  et  $y$ .

(2)  $x$  couvre  $x \cap y \Rightarrow x \cup y$  couvre  $y$ .

(2b)  $x$  couvre  $x \cap y$  et  $z \supseteq y \rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$ .

(2c)  $x$  couvre  $x \cap z$  et  $z \supseteq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$ .

(3)  $x$  couvre  $y$  et  $z$  couvre  $t \Rightarrow [(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$ .

(α<sub>1</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \cup y_i\}$  est sans répétition.

(α<sub>2</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : l'application  $x' \rightarrow x' \cup y$  du sous-treillis  $[x \cap y, x]$  dans le sous-treillis  $[y, x \cup y]$  est biunivoque.

(α<sub>3</sub>) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le

<sup>(39)</sup> Les conditions (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>), (B<sub>3</sub>), (B<sub>4</sub>), (B<sub>5</sub>), (B<sub>6</sub>), (B<sub>7</sub>), ( $\bar{B}$ ), signalées à la fin du Chapitre I, équivalent évidemment aussi à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

couple  $(y, x)$  : l'application  $y' \rightarrow y' \cap x$  du sous-treillis  $[y, x \cup y]$  dans le sous-treillis  $[x \cap y, x]$  est une application sur.

( $\alpha_4$ ) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  : toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \cap y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = y_i \cap x$ , à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \cup y$ .

( $\alpha_5$ ) Si la propriété suivante a lieu pour un couple  $(x, y)$ , elle a lieu pour le couple  $(y, x)$  :  $x \cap y \leq z \leq x \Rightarrow (z \cup y) \cap x = z$ .

( $\alpha_6$ ) Si un couple  $(x, y)$  est modulaire, le couple  $(y, x)$  est modulaire.

*Démonstration.* — L'équivalence de ces diverses conditions à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie résulte du lemme précédent et des théorèmes 4, 4, 5, 6, 7 du Chapitre I.

## CHAPITRE IV.

### ÉTUDE D'UN EXEMPLE DE TREILLIS SEMI-MODULAIRE DE LONGUEUR INFINIE :

#### LE TREILLIS DES VARIÉTÉS LINÉAIRES DE L'ESPACE DE HILBERT.

1. GÉNÉRALITÉS. — Plaçons-nous dans l'ensemble des sous-ensembles de vecteurs de l'espace de Hilbert  $H$  (c'est évidemment une algèbre de Boole vis-à-vis de la relation d'inclusion). Le sous-ensemble vide sera représenté par  $\emptyset$ .

a. Si  $X$  est le sous-ensemble générique, le passage de  $X$  à la variété linéaire  $\bar{X}$  engendrée par  $X$  est une opération de fermeture <sup>(40)</sup> : on a les propriétés caractéristiques d'extensivité ( $X \subset \bar{X}$ ), d'idempotence ( $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$ ), d'isotonie ( $X \subset Y \Rightarrow \bar{X} \subset \bar{Y}$ ). Il en résulte que l'ensemble des variétés linéaires constitue un *treillis complet*  $T_0$  vis-à-vis de la relation d'inclusion. Ces variétés linéaires ne sont autres que les sous-groupes permis du groupe abélien à opérateurs, dont les éléments sont les vecteurs de l'espace de Hilbert ; le treillis  $T_0$  est donc un *treillis modulaire*.

b. Le passage d'une variété linéaire  $\bar{X}$  à la variété linéaire fermée  $\bar{X}^*$  qu'elle engendre (ou plus généralement le passage d'un sous-ensemble à la variété linéaire fermée qu'il engendre) est encore une opération de fermeture : les trois propriétés caractéristiques sont satisfaites. L'ensemble des variétés linéaires fermées constitue donc un *treillis complet*  $T_1$  vis-à-vis de la relation d'inclusion. Ce n'est pas un sous-treillis de  $T_0$  car, si l'intersection de deux variétés linéaires

---

(40) G. BIRKHOFF [1], p. 49.

fermées est bien une variété linéaire fermée, il n'en est pas de même de leur somme linéaire <sup>(41)</sup>. D'ailleurs, le treillis  $T_1$  n'est pas modulaire <sup>(42)</sup>.

C'est  $T_1$  que nous allons étudier en utilisant les résultats du Chapitre I. Nous rapporterons l'espace de Hilbert à un système orthonormal complet <sup>(43)</sup> :  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$ . Nous désignerons les variétés linéaires fermées par des lettres capitales sans barre ni astérisque, aucune confusion n'étant à craindre.  $A = (\xi_1, \xi_2)$  désignera par exemple la variété linéaire (fermée) engendrée par les vecteurs  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

Remarquons tout de suite que  $T_1$  ne satisfait ni à la condition de chaîne ascendante ni à la condition de chaîne descendante : la chaîne

$$\{A_0 = \emptyset < A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots\},$$

où  $A_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$  est une chaîne ascendante infinie, alors que la chaîne  $\{D_0 = H > D_1 > \dots > D_n > \dots\}$ , où  $D_i = (\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_n, \dots)$  est une chaîne descendante infinie.

c. Signalons encore que  $T_0$  et  $T_1$  admettent comme sous-treillis commun, le treillis  $T_2$  de toutes les variétés linéaires de dimension finie. Celui-ci est *modulaire* mais *non complet* (il ne possède pas d'élément universel). Toutefois, il satisfait à la condition de chaîne descendante et est par conséquent *conditionnellement complet*.

## 2. PROPRIÉTÉS DE COUVERTURE DU TREILLIS $T_1$ .

a. LEMME 1. — *A couvre B si et seulement si A est engendré par les éléments de B auxquels on ajoute un seul élément.*

Si A couvre B, soit  $\xi$  un élément quelconque de H appartenant à A et n'appartenant pas à B. La variété linéaire X engendrée par  $\xi$  et par les éléments de B satisfait à  $B < X \leq A$ . On en tire immédiatement  $X = A$ .

Supposons maintenant que A soit engendrée par les éléments de B auxquels on a ajouté un élément  $\xi$ . Montrons que A couvre B. Soit, pour cela, une variété linéaire fermée B' tel que l'on ait  $B < B' \leq A$ . On peut trouver dans B' un élément  $\eta$  n'appartenant pas à B. L'élément  $\eta$  appartient à A. Or, les éléments de A sont les éléments de la variété linéaire engendrée par  $\xi$  et les éléments de B,

<sup>(41)</sup> M. H. STONE [1], p. 21, où l'on peut trouver un contre-exemple. D'ailleurs, au paragraphe 4, la somme linéaire des sous-espaces B et X ne contient pas le vecteur  $\xi_1$  que contient le sous-espace linéaire fermé qu'ils engendrent.

<sup>(42)</sup> G. BIRKHOFF et J. VON NEUMANN [2], où l'on indique un sous-treillis non modulaire qui est d'ailleurs à la base de l'étude faite au paragraphe 4 : c'est le sous-treillis  $\{B, A, X, H, \emptyset\}$ .

<sup>(43)</sup> G. JULIA [1], p. 9.

donc les éléments de la forme  $\beta + \lambda \xi$  (où  $\beta \in B$  et où  $\lambda$  est un scalaire), car cette variété linéaire est fermée,  $(\xi)$  étant de dimension finie. On a donc  $\eta = \beta + \lambda \xi$ ; de  $\eta \notin B$ , on déduit  $\lambda \neq 0$ , d'où  $\xi = \frac{\eta - \beta}{\lambda}$  et, finalement,  $\xi \notin B'$  et  $A \subseteq B'$ . D'où  $B' = A$  et  $A$  couvre  $B$ .

La démonstration prouve que l'on peut prendre pour l'élément  $\xi$  un élément quelconque de  $A$  n'appartenant pas à  $B$ .

*b. LEMME 2. — Soient A et B deux éléments de  $T_1$  tels que l'on ait  $A > B$ . Alors, on peut trouver un élément de  $T_1$ , soit C, tel que l'on ait  $A \supseteq C > B$  et C couvre B.*

C'est une conséquence facile du lemme 1. Soit  $\xi$  un élément de  $H$  appartenant à  $A$  sans appartenir à  $B$ . La variété linéaire (fermée) engendrée par les éléments de  $B$  auxquels on ajoute  $\xi$  répond à la question.

*c. Le treillis  $T_1$  satisfait aux conditions  $(L_7)$ ,  $(L_7')$ ,  $(L_7R)$ ,  $(L_7R')$  de G. Birkhoff [1] (voir R. CROISOT [3], Chap. II).*

Dans le treillis  $T_1$ , les points (au sens de la théorie des treillis) sont évidemment les variétés linéaires de dimension 1. Il est trivial que chaque variété linéaire fermée  $A$  (en particulier, l'espace entier  $H$ ) est engendrée par les éléments des points  $P$  tels que l'on ait  $P \subseteq A$ . Il est bien connu que, pour chaque variété linéaire fermée  $A$ , on peut trouver une variété linéaire fermée  $A'$  telle que l'on ait  $A \cap A' = \emptyset$  et  $A \cup A' = H$  [on prend, par exemple, pour  $A'$ , la variété orthogonale complémentaire de  $A$  <sup>(44)</sup>]. Pour montrer l'existence des compléments relatifs, il suffit de remarquer que le sous-treillis convexe  $[A, B]$  (où  $A < B$ ) est isomorphe soit au treillis  $T_1$ , soit au treillis des variétés linéaires d'un espace à un nombre fini de dimensions construit à partir du corps des nombres complexes [espaces unitaires <sup>(45)</sup>].

Signalons également que, dans le treillis  $T_1$ , la  $\cap$ -continuité est en défaut.

Prenons la chaîne ascendante  $\{X_i\}$  telle que  $X_i = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i)$  avec  $\eta_1 = \xi_1 + \frac{\xi_3}{10^3}, \eta_2 = \xi_1 + \frac{\xi_5}{10^5}, \dots, \eta_n = \xi_1 + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n+1}}, \dots$ . On a  $X_i \uparrow X$  avec  $X = (\xi_1, \xi_3, \xi_5, \dots, \xi_{2n+1}, \dots)$ . Considérons d'autre part,  $Y = (\xi_1)$ . On a  $X_i \cap Y = \emptyset$  pour tout  $i$ , d'où  $X_i \cap Y \uparrow \emptyset$ . Pourtant, on a  $X \cap Y = (\xi_1)$  <sup>(46)</sup>.

**3. AUTO-DUALITÉ DU TREILLIS  $T_1$ .** — Il est bien connu que l'application  $X \rightarrow X'$  de la variété linéaire fermée générique de l'espace de Hilbert sur la variété

<sup>(44)</sup> G. JULIA [1], p. 51.

<sup>(45)</sup> M. H. STONE [1], p. 16-18.

<sup>(46)</sup> Ceci provient du fait que  $X$  n'est pas la réunion des  $X_i$  au sens de la théorie des ensembles. Il n'en est pas ainsi dans le treillis des partitions d'un ensemble (voir R. CROISOT [3], Chap. II). On pourra rapprocher aussi l'exercice 3, p. 64 de G. BIRKHOFF [1].

linéaire orthogonale complémentaire est telle que l'on ait, outre  $X \cap X' = \emptyset$  et  $X \cup X' = H$ ,

$$(X \cap Y)' = X' \cup Y' \quad \text{et} \quad (X \cup Y)' = X' \cap Y'.$$

Cette application réalise un automorphisme dual de  $T_1$  <sup>(47)</sup>.

On déduit de là la validité de l'énoncé dual de celui du lemme 2.

#### 4. ÉTUDE, DANS LE TREILLIS $T_1$ , DES CONDITIONS DU CHAPITRE I.

a. LEMME 3. — *Le treillis  $T_1$  satisfait à la condition (2).*

Soient A et B deux variétés linéaires fermées telles que A couvre  $A \cap B$ . Soit  $\{\xi_i\}$  un système de générateurs de  $A \cap B$ . On a  $A \cap B = (\{\xi_i\})$ . Puisque A couvre  $A \cap B$ , il existe d'après le lemme 1 un élément  $\alpha$  de H tel que l'on ait  $A = (\{\xi_i\}, \alpha)$ . Soit  $\{\xi_i, \eta_\lambda\}$  un système de générateurs de B. On a évidemment  $A \cup B = (\{\xi_i, \eta_\lambda\}, \alpha)$ . D'après le lemme 1,  $A \cup B$  couvre B, car  $\alpha$  ne peut appartenir à B puisqu'il n'appartient certainement pas à  $A \cap B$ .

LEMME 4. — *Le treillis  $T_1$  satisfait à la condition (5).*

Ceci résulte d'une remarque de R. P. Dilworth [1] selon laquelle, dans les treillis satisfaisant à la condition du lemme 2, la condition (2) entraîne la condition (5).

Cette propriété est facile à démontrer : Soient X, Y, Z, tels que l'on ait

$$X \cap Y < Z < Y < X \cup Z.$$

Prenons T tel que l'on ait  $X \cap Y < T \leq X$  et T couvre  $X \cap Y$ . D'après (2), on a  $Z \cup T$  couvre Z et, puisqu'on a certainement  $Z \cup T \not\leq Y$ , on en déduit

$$(Z \cup T) \cap Y = Z.$$

b. Nous considérons le sous-treillis de  $T_1$  indiqué dans G. Birkhoff et J. von Neumann [2] constitué par les éléments  $B = (\{\xi_{2n}\})$ , où n est un entier positif quelconque,

$$X = \left( \left\{ \frac{\xi_1}{10^n} + \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right\} \right), A = (\xi_1, \left\{ \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right\}), \emptyset \text{ et } H.$$

On a évidemment  $A > X$  et  $B \cap A = B \cap X = \emptyset$ ,  $B \cup A = B \cup X = H$ .

LEMME 5. — *Le couple (B, A) possède la propriété a.*

<sup>(47)</sup> G. BIRKHOFF [1], exercice 4, p. 124. Ceci est un cas particulier du corollaire du théorème 9, p. 54.

Soit  $U \leq B$ . Il faut établir  $(U \cup A) \cap B = U$ . On a évidemment  $U \leq (U \cup A) \cap B$ . Soit maintenant  $\eta$  un élément de  $H$  appartenant à  $(U \cup A) \cap B$ . On a  $\eta \in B$  et  $\eta \in U \cup A$ . Or,  $U \cup A$  est l'ensemble des éléments de la forme  $\mu + \alpha$  avec  $\mu \in U$  et  $\alpha \in A$  et des limites fortes de tels éléments. Si l'on a  $\eta = \mu + \alpha$ , on en déduit  $\alpha \in B$ , d'où  $\alpha \in A \cap B = \emptyset$ , soit  $\alpha = 0$  et  $\eta = \mu \in U$ . Si  $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n + \alpha_n$ , la projection de  $\mu_n + \alpha_n$  sur  $B'$ , variété linéaire orthogonale complémentaire de  $B$ , tend vers celle de  $\eta$ , donc tend vers zéro. Or, cette projection provient seulement de  $\alpha_n$ ; donc la projection de  $\alpha_n$  sur chacun des vecteurs  $\xi_{2i+1}$  tend vers zéro, ainsi que sa projection sur  $\xi_1$ ; il en résulte que les projections de  $\alpha_n$  sur tous les vecteurs de la base orthogonale  $\left\{ \xi_1, \xi_{2i} + \frac{\xi_{2i+1}}{10^{2i}} \right\}$  de  $A$  tendent vers zéro; autrement dit,  $\alpha_n$  tend vers zéro et l'on a  $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \in U$ . Finalement, on a  $(U \cup A) \cap B \leq U$ , d'où  $(U \cup A) \cap B = U$ .

LEMME 6. — *Le couple  $(A, B)$  possède la propriété  $a'$ .*

Soit  $V \geq A$ . Il faut établir  $(V \cap B) \cup A = V$ . Nous transformons par la dualité du paragraphe 3. Il faut établir  $(V' \cup B') \cap A' = V'$  pour tout  $V'$  tel que l'on ait  $V' \leq A'$ , c'est-à-dire qu'il faut montrer que le couple  $(A', B')$  possède la propriété  $a$ . On voit aisément que l'on a  $A' = \left( \left\{ \xi_{2n+1} - \frac{\xi_{2n}}{10^{2n}} \right\} \right)$ ,  $B' = (\{ \xi_1, \xi_{2n+1} \})$ . Faisons, dans l'espace de Hilbert, le changement de système orthonormal complet défini par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_{2n} &= \frac{1}{K_n} \left( \xi_{2n+1} - \frac{\xi_{2n}}{10^{2n}} \right) \quad \text{avec} \quad K_n^2 = 1 + \frac{1}{10^{4n}}, \\ \eta_{2n+1} &= \frac{1}{K_n} \left( \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right) \end{aligned}$$

ou les formules équivalentes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1, \\ \xi_{2n} &= \frac{1}{K_n} \left( \eta_{2n+1} - \frac{\eta_{2n}}{10^{2n}} \right), \\ \xi_{2n+1} &= \frac{1}{K_n} \left( \eta_{2n} + \frac{\eta_{2n+1}}{10^{2n}} \right). \end{aligned}$$

Rapportées au nouveau système de base, les variétés  $A'$  et  $B'$  s'écrivent respectivement :

$$A' = (\{ \eta_{2n} \}), \quad B' = \left( \left\{ \eta_1, \eta_{2n} + \frac{\eta_{2n+1}}{10^{2n}} \right\} \right).$$

Il suffit d'appliquer le lemme 5 pour voir que le couple  $(A', B')$  possède la propriété  $a$ .

LEMME 7. — *Le couple (A, B) ne possède pas la propriété a.*

On a, en effet,  $(X \cup B) \cap A = A \neq X$ .

LEMME 8. — *Le couple (A, B) ne vérifie pas la propriété b.*

Revenons à  $A'$  et  $B'$  comme dans la démonstration du lemme 6. Soit

$$Y' = \left( \left\{ \frac{\eta_1}{10^n} + \eta_{2n} + \frac{\eta_{2n+1}}{10^{2n}} \right\} \right).$$

On a  $Y' < B'$ . Considérons la chaîne  $\{Y'_0 = \emptyset < Y'_1 < Y'_2 < \dots < Y'_i < \dots < Y'\}$  maximale entre  $\emptyset$  et  $Y'$ , où l'on a

$$Y'_i = \left( \left\{ \frac{\eta_1}{10^n} + \eta_{2n} + \frac{\eta_{2n+1}}{10^{2n}} \right\}_{n \leq i} \right).$$

Formons la chaîne  $\{Y'_i \cup A' < H\}$ . On a

$$Y'_i \cup A' = \left( \left\{ \eta_{2n} \right\}, \left\{ \eta_1 + \frac{\eta_{2n+1}}{10^n} \right\}_{n \leq i} \right).$$

La chaîne  $Y'_i \cup A'$  est maximale entre  $A'$  et  $H$ . Montrons qu'on a  $(Y'_i \cup A') \cap B' = Y'_i$ . Soit  $\xi$  un élément de  $(Y'_i \cup A') \cap B'$ . De  $\xi = \eta'_i + \alpha'$  avec  $\eta'_i \in Y'_i$  et  $\alpha' \in A'$ , on déduit  $\alpha' \in B'$ , d'où  $\alpha \in A' \cap B' = \emptyset$  et  $\alpha' = \emptyset$ , d'où  $\xi = \eta'_i \in Y'_i$ . Il résulte de là que l'on a  $(Y'_i \cup A') \cap B' = Y'_i$ .

En revenant à  $A$  et  $B$  par dualité, on obtient une chaîne, la transformée de la chaîne  $\{Y'_i \cup A' < H\}$ , maximale entre  $\emptyset$  et  $A$ , qui donne une chaîne, la transformée de la chaîne  $\{Y'_i < B'\}$ , non maximale entre  $B$  et  $H$  puisqu'on peut y intercaler  $Y$ , variété transformée de  $Y'$ .

LEMME 9. — *Le couple (B, X) ne possède pas la propriété m.*

Soit la chaîne  $\{\emptyset < \dots < B_i < \dots < B_2 < B_1 < B_0 = B\}$ , où l'on a

$$B_i = (\{\xi_{2n}\}_{n > i}).$$

Cette chaîne est maximale entre  $\emptyset$  et  $B$ . Or, on a  $(B_i \cup A) \cap B = B_i$ , puisque le couple  $(B, A)$  possède la propriété *a*. D'autre part, on a  $B_i \cup X \supseteq A$  (car  $B_i \cup X$  contient  $\xi_i$ ), d'où  $B_i \cup X = B_i \cup A$  et  $(B_i \cup X) \cap B = B_i$ . Finalement, la chaîne  $\{X < \dots < B_i \cup X < \dots < H\}$  n'est pas maximale entre  $X$  et  $H$ , car on peut intercaler l'élément  $A$ . On pourrait évidemment l'intercaler dans n'importe quelle chaîne entre  $X$  et  $H$  capable de redonner la chaîne  $\{\emptyset < \dots < B_i < \dots < B\}$ . La propriété *m* est donc en défaut.

LEMME 10. — *Le couple (B, X) ne possède pas la propriété j.*

Soit la chaîne  $(\emptyset, \emptyset) < \dots < (\emptyset, X_j) < \dots < (\emptyset, X) < \dots < (B_i, X) < \dots < (B, X)$ , où l'on a  $B_i$  comme dans la démonstration du lemme 9 et

$$X_j = \left( \left\{ \frac{\xi_1}{10^n} + \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right\}_{n \leq j} \right).$$

Cette chaîne est obtenue à partir de la chaîne

$$\{\emptyset < \dots < X_j < \dots < X < \dots < B_i \cup X < \dots < H\}.$$

Elle ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale entre  $\emptyset$  et  $H$ ;  $(B_i, X)$  doit être obtenu à partir d'un élément, soit  $C_i$ , tel que l'on ait  $B_i \cup X \leq C_i$ . De  $C_i \geq A$ , on déduit  $(C_i \cap B) \cup A = C_i$  (lemme 6) et, puisqu'on veut obtenir  $(B_i, X)$ , on doit avoir  $C_i \cap B = B_i$ , d'où  $B_i \cup A = C_i$ . On voit donc que  $(B_i, X)$  ne peut être obtenu qu'à partir de  $B_i \cup X = B_i \cup A$ . On voit aisément que l'on a  $\bigcap_i (B_i \cup A) = A$ .

Donc,  $A$  peut être intercalé dans la chaîne assurant l'obtention s'il n'y figure pas. Puisqu'on cherche une chaîne maximale,  $A$  doit y figurer. Or,  $A$  donne  $(\emptyset, X)$ . Si, maintenant, tous les  $(\emptyset, X_j)$  sont obtenus à partir de  $X_j$ , on peut intercaler  $X$  dans la chaîne envisagée et elle ne peut être maximale. Sinon, soit  $j_1$  le premier indice  $j$  pour lequel  $X_j$  est obtenu à partir d'un élément différent de lui. Alors  $X_{j_1}$  peut évidemment être intercalé dans la chaîne assurant l'obtention et celle-ci ne peut pas être choisie maximale. La propriété  $j$  est en défaut.

c. THÉOREME. — *Le treillis  $T_1$  satisfait aux conditions (5), (6), (2), (1), (3) et à leurs duales. Il ne satisfait pas aux conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J<sub>1</sub>), (J), ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), (M), ni à leurs duales.*

$T_1$  satisfait à (5), d'après le lemme 4. Il satisfait donc à (6), à (2), à (1), à (3) d'après le théorème 1 du Chapitre II. Il satisfait aux conditions duales puisqu'il est auto-dual.

D'après le lemme 5, le couple  $(B, A)$  possède la propriété  $a$ ; d'après le lemme 6, le couple  $(A, B)$  possède la propriété  $a'$ . Il en résulte que le couple  $(B, A)$  possède aussi la propriété  $b$ ; en effet, si  $\{B_i\}$  était une chaîne maximale entre  $\emptyset$  et  $B$  telle que la chaîne  $\{B_i \cup A\}$  soit non maximale entre  $A$  et  $H$ , on pourrait intercaler dans cette dernière chaîne un élément, soit  $C$ , qui serait tel que l'on ait  $C \cap B = (B_i \cup A) \cap B = B_i$  pour un certain  $i$  (d'après la propriété  $a$ ) et ceci contredirait le fait que le couple  $(A, B)$  possède la propriété  $a'$ . Le couple  $(B, A)$  possède donc la propriété  $c$  d'après une remarque déjà faite. Le couple  $(A, B)$  ne possédant, ni la propriété  $a$ , ni la propriété  $b$ , d'après les lemmes 7 et 8, ni évidemment la propriété  $c$ , les conditions ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) sont en défaut. Les conditions (M) et (J) ne sont pas satisfaites d'après les lemmes 9 et 10. Les conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J<sub>1</sub>) ne sont pas satisfaites d'après le théorème 1 du Chapitre II. Les conditions duales de ces conditions non satisfaites ne le sont pas non plus.

BIBLIOGRAPHIE.

- G. BIRKHOFF [1], *Lattice theory* (Colloquium, 1949).
- G. BIRKHOFF et J. VON NEUMANN [2], *The logic of quantum mechanics* (*Annals of Math.*, 37, 1936, p. 823-843).
- R.P. DILWORTH [1], *Ideals in Birkhoff lattices* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 49, 1941, p. 325-353).
- G. JULIA [1], *Introduction mathématique aux théories quantiques*, 2<sup>e</sup> partie, Gauthier-Villars, 1938.
- S. MAC LANE [1], *A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases* (*Duke Math. Journal*, 4, 1938, p. 455-468).
- M. H. STONE [1], *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis* (Colloquium, 1932).
- L. R. WILCOX [1], *Modularity in the theory of lattices* (*Annals of Math.*, 40, 1939, p. 490-505).
- R. CROISOT [1], *Axiomatique des treillis semi-modulaires* (*C. R. Acad. Sc.*, 231, 1950, p. 12).
- R. CROISOT [2], *Diverses caractérisations des treillis semi-modulaires, modulaires et distributifs* (*C. R. Acad. Sc.*, 231, 1950, p. 1399).
- R. CROISOT [3], *Quelques applications et propriétés des treillis semi-modulaires de longueur infinie* (Deuxième partie de ma thèse, à paraître aux *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*).





# QUELQUES APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES DE LONGUEUR INFINIE

PAR M. ROBERT CROISOT

## INTRODUCTION

Dans un autre travail <sup>(1)</sup>, j'ai considéré un certain nombre de conditions équivalentes à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie et j'ai étudié les implications binaires qui les lient dans les treillis quelconques. De cette étude, il résulte que *la notion de semi-modularité se morcelle à l'extrême dans les treillis de longueur infinie*.

Ce fait soulève le problème de la définition générale d'un treillis semi-modulaire. Un tel problème ne se pose guère pour la modularité car, bien qu'il en existe plusieurs caractérisations dans les treillis de longueur finie et bien qu'elles ne soient plus équivalentes dans les treillis quelconques, l'une d'elles s'impose devant les autres, celle qui se traduit par une *règle de calcul*. Il n'existe pas de telle caractérisation de la semi-modularité, et il ne peut pas en exister, car *un sous-treillis d'un treillis semi-modulaire n'est pas nécessairement semi-modulaire*. On est guidé dans le choix de la meilleure définition par les résultats du chapitre III dans lequel on examine comment se conservent les conditions envisagées lorsqu'on passe de deux treillis à leur produit cardinal ou d'un treillis à un treillis homomorphe. Le comportement des différentes conditions n'est pas le même dans le passage au produit cardinal, les unes se conservant en toute généralité, d'autres pour des treillis conditionnellement complets, les dernières seulement pour des treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante. Quant à la permanence par homomorphisme, elle n'a pas lieu dans le cas général et, même, pour la plupart des conditions, dans le cas d'une condition de chaîne. Néanmoins, la condition suivante due à S. Mac Lane

$$(5) \quad x \wedge z < y < x < x \vee z \text{ entraîne l'existence de } t \text{ tel que l'on ait} \\ x \wedge z < t \leq z \quad \text{et} \quad (t \vee y) \wedge x = y$$

se conserve par homomorphisme si l'on part d'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante; de plus, elle fait partie de celles qui se conservent sans restriction par passage au produit cardinal. Le choix de la

(1) Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1951, pp. 203-265, référé T dans ce travail.

définition doit aussi tenir compte de l'intérêt des applications possibles. Dans cet ordre d'idées, le chapitre II est consacré à une application de la condition (2)

$$x \text{ couvre } x \wedge y \text{ implique } x \vee y \text{ couvre } y$$

aux treillis complémentés liée à la théorie de l'indépendance. La condition (5), plus forte que la condition (2), entraîne aussi les propriétés envisagées dans ce chapitre. Il semble donc naturel de prendre cette condition (5) comme *définition générale de la semi-modularité*, la condition (2) devant être rejetée parce que trivialement vérifiée dans les treillis où il n'existe pas de relations de couverture. D'ailleurs, la condition (5) est vérifiée dans les cas importants : treillis des partitions d'un ensemble quelconque, treillis des sur-corps algébriquement fermés d'un corps  $K$  contenus dans un sur-corps algébriquement fermé de  $K$  de dimension quelconque sur  $K$ , treillis des variétés linéaires fermées de l'espace de Hilbert.

On sait que, dans les treillis de longueur finie, la modularité peut être caractérisée par le couple de conditions (2) et (2'), duale de (2). Les autres conditions examinées, accompagnées de leur duale respective, conduisent-elles à des caractérisations de la modularité dans des treillis plus généraux que ceux de longueur finie ? Le chapitre I montre effectivement qu'un certain nombre des conditions étudiées, accompagnées de leur duale, caractérisent la modularité dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante). De plus, on trouvera là d'autres conditions équivalentes à la condition modulaire dans les treillis quelconques et d'énoncé souvent très voisin de ceux de certaines conditions de semi-modularité. On trouvera même quelques conditions du même type équivalentes à la distributivité dans les treillis quelconques.

Parmi les conditions envisagées dans le travail cité plus haut, je mentionne spécialement la condition

(3)  $x \text{ couvre } y, z \text{ couvre } t \text{ implique } [(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$   
intéressante, malgré son expression compliquée, car elle permet d'obtenir, par une méthode très naturelle, un cas assez général dans lequel deux chaînes finies de mêmes extrémités ont même longueur et ceci dans un treillis absolument arbitraire. C'est l'objet du chapitre IV et on en trouvera une application algébrique concrète au chapitre V qui redonne comme cas particuliers certains résultats de O. Ore sur les chaînes de sous-groupes d'un groupe et de P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin sur les chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.

---

## CHAPITRE I

### Application à l'axiomatique des treillis modulaires.

#### 1. PROPRIÉTÉS ET CARACTÉRISATIONS DES TREILLIS MODULAIRES QUELCONQUES.

**THÉOREME 1.** — *Un treillis modulaire satisfait aux conditions (R), (F),  $(\alpha^i)$ ,  $(\alpha_i)$ .*

*Démonstration.* — Si, dans un treillis, la condition (R) est en défaut, il existe un couple d'éléments  $(x, y)$  tel qu'on puisse trouver une chaîne non maximale du produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ , soit  $\{(x_i, y_i)\}$ , qui donne une chaîne  $\{x_i \wedge y_i\}$  maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . Dans la chaîne

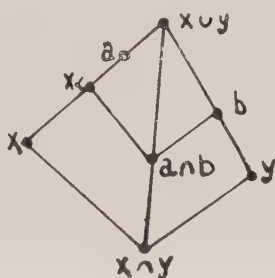


FIG. 1

$\{(x_i, y_i)\}$ , on peut alors intercaler un élément, soit  $(a, b)$ . L'élément  $a \wedge b$  appartient à la chaîne  $\{x_i \wedge y_i\}$ . Soit  $\alpha$  l'indice  $i$  pour lequel on a  $x_i \wedge y_i = a \wedge b$ . On a  $(a, b) \neq (x_\alpha, y_\alpha)$ , soit par exemple  $(a, b) > (x_\alpha, y_\alpha)$ . On ne peut avoir simultanément  $a = x_\alpha$ ,  $b = y_\alpha$ . Supposons qu'on ait  $a \neq x_\alpha$ . Les cinq éléments  $a, x_\alpha, b, a \wedge b, x \vee y$  constituent alors un sous-treillis isomorphe au treillis non modulaire à cinq éléments car on a  $a > x_\alpha$ ,  $a \wedge b = x_\alpha \wedge b = a \vee b = x_\alpha \vee b = x \vee y$ . Le treillis envisagé n'est donc pas modulaire et un treillis modulaire satisfait à la condition (R).

Soient maintenant un treillis modulaire et un couple  $(x, y)$  de ses éléments. Envisageons une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  et montrons que la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  (1). Supposons qu'on puisse intercaler un élément  $c$  dans cette dernière chaîne. Posons  $x'_c = c \wedge x$ ,  $y'_c = c \wedge y$ . Pour tout indice  $i$  tel que l'on ait  $x_i \vee y_i \leq c$ , on a  $x_i \leq x'_c$  car  $x_i = (x_i \vee y_i) \wedge x$ ,

(1) Cette démonstration est directement inspirée de celle qu'on trouve dans G. BIRKHOFF [1], p. 101. Cette dernière utilise le fait que les chaînes  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  sont maximales. Elle est donc valable dans le cas d'un treillis complet d'après le lemme 3 du chapitre II de T, mais elle ne l'est pas dans le cas général.

et  $y_i \leq y'_e$  car  $y_i = (y_i \vee x_i) \wedge y$ , d'où l'on déduit  $(x_i, y_i) \leq (x'_e, y'_e)$ . De la même façon, on voit que, pour tout indice  $i$  tel que l'on ait  $x_i \vee y_i \geq c$ , on a  $(x_i, y_i) \geq (x'_e, y'_e)$ . Il résulte de là que l'élément  $(x'_e, y'_e)$  appartient à la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  puisque cette chaîne est maximale et l'élément  $x'_e \vee y'_e$  appartient à la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$ . Posons d'autre part  $x_e = (c \vee y) \wedge x$ ,  $y_e = (c \vee x) \wedge y$ . Pour tout indice  $i$  tel que l'on ait  $x_i \vee y_i \leq c$ , on a  $x_i \leq x_e$  car  $x_i = (x_i \vee y_i \vee y) \wedge x$ , et  $y_i \leq y_e$  car  $y_i = (y_i \vee x_i \vee x) \wedge y$ , d'où l'on déduit  $(x_i, y_i) \leq (x_e, y_e)$ . De la même façon, pour tout indice  $i$  tel que l'on ait  $x_i \vee y_i \geq c$ , on a  $(x_i, y_i) \geq (x_e, y_e)$ . Donc, l'élément  $(x_e, y_e)$  appartient à la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  puisqu'elle est maximale. De plus, on a nécessairement  $(x_e, y_e) = (x'_e, y'_e)$  (c'est-à-dire  $x_e = x'_e$ ,  $y_e = y'_e$ ). Remarquons finalement d'une part  $c \geq x'_e \vee y'_e$ , d'autre part  $x_e \vee y_e = x_e \vee [y \wedge (c \vee x)] = (x_e \vee y) \wedge (c \vee x) = [(c \vee y) \wedge x] \vee y \wedge (c \vee x) = (c \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (c \vee x) = (c \vee y) \wedge (c \vee x) \geq c$  soit  $x_e \vee y_e \geq c \geq x'_e \vee y'_e$  d'où  $c = x'_e \vee y'_e$  et  $c$  appartient à la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$ . Un treillis modulaire satisfait donc à la condition (F).

On sait que le treillis des idéaux et le treillis des idéaux duaux d'un treillis modulaire sont modulaires. Ils satisfont donc à la propriété (R) et à la propriété ( $\alpha$ ) qui en est conséquence. C'est dire qu'un treillis modulaire satisfait aux conditions ( $\alpha_i$ ) et ( $\alpha^i$ ).

**COROLLAIRE.** — *Un treillis modulaire satisfait à toutes les conditions étudiées sauf peut être à la condition (I), ainsi qu'aux conditions duales.*

**Démonstration.** — C'est une conséquence immédiate du théorème 1 du chapitre II de T, et du fait que la modularité est une propriété auto-duale.

**THÉORÈME 2.** — *Un treillis est modulaire si et seulement si il satisfait à l'une quelconque des conditions suivantes ou à sa duale (\*) :*

(2) Notons, par analogie, la caractérisation suivante des treillis distributifs. Un treillis est distributif si et seulement si il satisfait à l'une quelconque des propriétés suivantes ou à sa duale :

(E<sub>1</sub>) Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{z_i\}$  du treillis  $[x \wedge y, x \vee y]$  est sans répétition, la chaîne  $\{z_i \vee x, z_i \vee y\}$  du treillis  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$  est sans répétition.

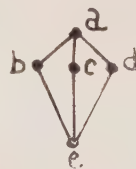
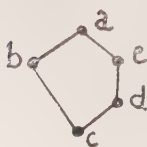
(E<sub>2</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , l'application  $z' \rightarrow (z' \vee x, z' \vee y)$  de  $[x \wedge y, x \vee y]$  dans  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$  est biunivoque.

(E<sub>3</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$  l'application  $(x', y') \rightarrow x' \wedge y'$  de  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$  dans  $[x \wedge y, x \vee y]$  est une application sur.

(E<sub>4</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , toute chaîne maximale  $\{z_i\}$  de  $[x \wedge y, x \vee y]$  peut être obtenue sous la forme  $z_i = x_i \wedge y_i$  à partir d'une chaîne de  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ .

(Q) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{z_i\}$  est maximale sans répétition entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ , la chaîne  $\{z_i \vee x, z_i \vee y\}$  est maximale sans répétition dans le produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ .

Les quatre premières conditions sont équivalentes car elles expriment toutes que tout couple  $(x, y)$  possède la propriété  $e$  du chapitre I de T.



- (A<sub>1</sub>) Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$  est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \vee y\}$  est sans répétition.
- (A<sub>2</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$  l'application  $x' \rightarrow x' \vee y$  du sous-treillis  $[x \wedge y, x]$  dans le sous-treillis  $[y, x \vee y]$  est biunivoque.
- (A<sub>3</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , l'application  $y' \rightarrow y' \wedge x$  du sous-treillis  $[y, x \vee y]$  dans le sous-treillis  $[x \wedge y, x]$  est une application sur.
- (A<sub>4</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$ .
- (A<sub>5</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , si un élément  $z$  satisfait à  $x \wedge y \leq z \leq x$ , on a  $(z \vee y) \wedge x = z$ .
- (C) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$  est maximale sans répétition, la chaîne  $\{x_i \vee y\}$  est maximale sans répétition entre  $y$  et  $x \vee y$ .
- (D<sub>1</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  est sans répétition, la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est sans répétition.
- (D<sub>2</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , l'application  $(x', y') \rightarrow x' \vee y'$  de  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  dans  $[x \wedge y, x \vee y]$  est biunivoque.
- (D<sub>3</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , l'application  $z' \rightarrow (z' \wedge x, z' \wedge y)$  de  $[x \wedge y, x \vee y]$  dans  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  est une application sur.
- (D<sub>4</sub>) Pour tout couple  $(x, y)$ , toute chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  de  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = z_i \wedge x, y_i = z_i \wedge y$  à partir d'une chaîne de  $[x \wedge y, x \vee y]$ .
- (G) Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  est maximale sans répétition, la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est maximale sans répétition entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ .
- (3)  $x \geq y$  et  $z \geq t$  implique  $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$ .

*Démonstration.* — D'après le théorème 1 du chapitre I de T, les cinq conditions (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>), (A<sub>4</sub>), (A<sub>5</sub>) équivalent au fait que tout couple  $(x, y)$  est modulaire, c'est-à-dire au fait que le treillis envisagé est modulaire.

Un treillis distributif vérifie (E<sub>3</sub>) : l'application  $z' \rightarrow (z' \vee x, z' \vee y)$  est biunivoque car  $z'$  est déterminé par  $z' \vee x$  et  $z' \vee y$  ; en effet,  $z' = z' \vee (x \wedge y) = (z' \vee x) \wedge (z' \vee y)$ . Un treillis non distributif ne vérifie pas (E<sub>3</sub>) : il contient un des deux sous-treillis représentés par les diagrammes de la page précédente; dans le premier cas, le couple  $(b, e)$  ne vérifie pas la propriété *e* car, dans l'application envisagée dans (E<sub>3</sub>), les éléments *e* et *d* sont appliqués sur l'élément  $(b, e)$ ; dans le deuxième cas, le couple  $(b, d)$  ne vérifie pas la propriété *e* car, dans cette application, les éléments *a* et *e* sont appliqués sur l'élément  $(a, a)$ .

Un treillis distributif satisfait à (Q). En effet, si une chaîne  $\{z_i\}$  est sans répétition, la chaîne  $\{(z_i \vee x, z_i \vee y)\}$  est sans répétition d'après (E<sub>1</sub>). Si une chaîne  $\{z_i\}$  est maximale, puisqu'elle est obtenue d'après (E<sub>1</sub>) à partir de la chaîne  $\{(z_i \vee x, z_i \vee y)\}$ , cette dernière chaîne doit être maximale d'après (R). D'autre part, un treillis satisfaisant à (Q) est distributif car (Q) entraîne (E<sub>1</sub>).

Dans des ordres d'idées différents, on pourra trouver d'autres caractérisations des treillis distributifs dans R. CROISOT, *Axiomatique des lattices distributives*, *Canadian Journal of Mathematics* p. 24, 1951. (Ce travail constitue une réponse aux problèmes 64 et 65 de G. IBRKHOF [1] p. 138-139).

On a déjà remarqué que, pour un couple d'éléments  $(x, y)$ , la propriété  $c$  est équivalente à l'ensemble des propriétés  $a$  et  $b$ . La condition (C) pour un treillis équivaut donc à l'ensemble des conditions (A) et (B). Or, la condition (A) qui exprime que le treillis est modulaire entraîne la condition (B) d'après le corollaire du théorème 1. Il en résulte que les conditions (A) et (C) sont équivalentes, c'est-à-dire que la condition (C) caractérise la modularité.

D'après le théorème 2 du chapitre I de T, les quatre conditions  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$ ,  $(D_4)$  équivalent au fait que tout couple  $(x, y)$  est modulaire (d'après la forme 5 de la propriété  $d$ ). Elles équivalent donc aux conditions précédentes.

On voit aisément que, pour un couple  $(x, y)$ , la propriété  $g$  équivaut à l'ensemble des propriétés  $d$  et  $f$ . La condition (G) pour un treillis équivaut donc à l'ensemble des conditions (D) et (F). Or, la condition (D) exprimant la modularité entraîne la condition (F) d'après le corollaire du théorème 1. Il en résulte que les conditions (D) et (G) sont équivalentes, c'est-à-dire que la condition (G) caractérise aussi la modularité.

Quant à la condition  $\overline{(3)}$ , elle implique la modularité. En effet, soient trois éléments  $x, y, z$  tels que l'on ait  $x \geq y$ , et posons  $t = z \wedge y$ . En appliquant la condition  $\overline{(3)}$ , il vient l'égalité

$$(x \wedge z) \vee y = (z \vee y) \wedge x.$$

Réciproquement, la modularité implique la condition  $\overline{(3)}$ . En effet, soient quatre éléments  $x, y, z, t$  tels que l'on ait  $x \geq y$  et  $z \geq t$ . On a, en appliquant deux fois la condition modulaire,  $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \wedge x) \vee t] \vee y = [(z \wedge x) \vee y] \vee t = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$ .

Les conditions duales caractérisent évidemment aussi la modularité.

**THÉORÈME 3.** — *Un treillis est modulaire si et seulement si il satisfait aux conditions simultanées  $[(F) \text{ ou } (B)]$  et  $[(R') \text{ ou } (L')]$  <sup>(3)</sup>. On a évidemment aussi le résultat dual.*

*Démonstration.* — On sait que la condition (F) entraîne la condition (B) et que la condition  $(R')$  entraîne la condition  $(L')$  d'après le théorème 1 du chapitre II de T. On sait également que les treillis modulaires satisfont aux conditions (F) et  $(R')$ . Il suffit donc d'établir qu'un treillis satisfaisant aux conditions (B) et  $(L')$  est modulaire.

Envisageons pour cela un treillis non modulaire. Il possède un sous-treillis de cinq éléments,  $a, b, c, d, e$  tels que  $a > b > c$  et  $a > e > d > c$ .

Soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $c$  et  $d$ . Si la chaîne  $\{x_i \vee b\}$  n'est pas maximale, le couple  $(d, b)$  ne possède pas la propriété  $b$  et la

(3)  $(R')$  désigne la condition duale de la condition (R). Le procédé de notation est général.

condition (B) est en défaut. Si la chaîne  $\{x_i \vee b\}$  est maximale, le couple  $(b, e)$  ne satisfait pas à la propriété  $l'$  et la condition (L') est en défaut.

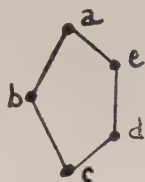


FIG. 4

Le résultat à établir est démontré.

## 2. CARACTÉRISATION DES TREILLIS MODULAIRES SATISFAISANT A UNE CONDITION DE CHAÎNE.

**THÉORÈME 4.** — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) est modulaire si et seulement si il possède l'une quelconque des propriétés suivantes :*

(R) et (R') : Pour tout couple d'éléments  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{z_i\}$  maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  est obtenue sous la forme  $z_i = x_i \wedge y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$  ou sous la forme  $z_i = x_i \vee y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ , la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est nécessairement maximale.

(S) et (S') : Pour tout couple  $(x, y)$ , dans les mêmes conditions que ci-dessus, la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  peut être choisie maximale.

(F) et (F') : Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ , la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  et si une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ , la chaîne  $\{x_i \wedge y_i\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ .

(B) et (B') : Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$  est maximale, la chaîne  $\{x_i \vee y\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \vee y$  et si une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$  est maximale, la chaîne  $\{y_i \wedge x\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$ .

(L) et (L') : Pour tout couple  $(x, y)$ , si une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$ , la chaîne  $\{y_i\}$  est nécessairement maximale et si une chaîne  $\{y'_i\}$  maximale entre  $y$  et  $x \vee y$  est obtenue sous la forme  $y'_i = x'_i \vee y$  à partir d'une chaîne  $\{x'_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$ , la chaîne  $\{x'_i\}$  est nécessairement maximale.

(M) et (M') : Pour tout couple  $(x, y)$ , dans les mêmes conditions que ci-dessus les chaînes  $\{y_i\}$  et  $\{x'_i\}$  peuvent être choisies maximales.

*Démonstration.* — On sait d'abord, d'après le théorème 1, qu'un treillis modulaire satisfait à toutes ces conditions. D'après T (théorème 1, chapitre II), il suffit de montrer qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et aux conditions (M) et (M') est modulaire. Ceci résulte du théorème 3 et de T (théorèmes 2 et 3, chapitre II) : en effet, si le treillis satisfait par exemple à la condition de chaîne descendante, la condition (M) entraîne la condition (B) et la condition (M') entraîne la condition (L'), et le treillis est modulaire.

*COROLLAIRE.* — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) et aux conditions (I) et (I') est modulaire.*

*Démonstration.* — Ceci résulte de T (théorème 1, chapitre II) qui affirme que la condition (I) entraîne la condition (M).

Pour établir le théorème 5, nous aurons besoin du lemme suivant :

*LEMME 1.* — *Dans un treillis non modulaire satisfaisant aux conditions ( $\alpha$ ) et ( $\alpha'$ ), il existe une chaîne ascendante et une chaîne descendante infinies.*

*Démonstration.* — Le treillis envisagé n'étant pas modulaire possède cinq éléments  $x_1, z_1, y_1, y'_1, t_1$  tels que l'on ait  $y_1 > y'_1, t_1 = x_1 \wedge y_1 = x_1 \wedge y'_1, z_1 = x_1 \vee y_1 = x_1 \vee y'_1$ . Le couple  $(y_1, x_1)$  ne possède pas la propriété  $a$  car on a  $(y'_1 \vee x_1) \wedge y_1 = y_1 \neq y'_1$ . La condition ( $\alpha$ ) étant vérifiée, le couple  $(x_1, y_1)$  ne possède pas la propriété  $a$  et il existe un élément  $x_2$  ( $x_1 > x_2 > t_1$ ) tel que l'élément  $x_2 \vee y_1 = z_2$  ( $z_2$  peut être égal à  $z_1$ ) satisfasse à  $z_2 \wedge x_1 = x'_2 > x_2$ . Le couple  $(x_2, y_1)$  ne possède pas la propriété

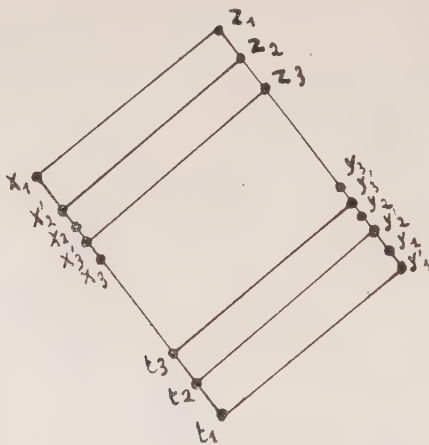


FIG. 5

priété  $a'$  car on a  $(x'_2 \wedge y_1) \vee x_2 = x_2 \neq x'_2$ . La condition ( $\alpha'$ ) étant vérifiée, le couple  $(y_1, x_2)$  ne possède pas la propriété  $a'$  et il existe un élément  $y_2$

$(y_1 < y_2 < z_2)$  tel que l'élément  $y_2 \wedge x_2 = t_2$  ( $t_2$  peut être égal à  $t_1$ ) satisfasse à  $t_2 \vee y_1 = y'_2 < y_2$ . Le raisonnement fait avec le couple  $(x_1, y_1)$  peut être répété avec le couple  $(x_2, y_2)$  et montre qu'il existe un élément  $x_3$  tel que  $x_2 > x_3 > t_2$ . Le raisonnement fait avec le couple  $(y_1, x_2)$  peut de même être répété avec le couple  $(y_2, x_3)$  et montre qu'il existe un élément  $y_3$  tel que  $y_2 < y_3 < z_3$ . Et ainsi de suite. On obtient une chaîne descendante infinie :  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ , et une chaîne ascendante infinie  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$

**THÉORÈME 5.** — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) est modulaire si et seulement si il possède l'une quelconque des propriétés suivantes :*

$(\alpha)$  et  $(\alpha')$  : La modularité des couples et la propriété duale sont des propriétés symétriques.

$(\alpha_1)$  et  $(\alpha'_1)$  : La modularité des couples est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux et la propriété duale est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux duaux.

$(\alpha'')$  et  $(\alpha''')$  : La modularité des couples est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux duaux et la propriété duale est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux.

*Démonstration :* Un treillis modulaire satisfait à ces conditions d'après le théorème 1. D'après le théorème 1 du chapitre II de T, il suffit de montrer qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et aux conditions  $(\alpha)$  et  $(\alpha')$  est modulaire. Ceci résulte du lemme 1.

### 3. PROPRIÉTÉS NÉGATIVES.

*a)* Le théorème 1 affirme qu'un treillis modulaire satisfait à toutes les conditions étudiées sauf peut être à la condition (I). En fait, il existe des treillis modulaires ne satisfaisant pas à cette condition. Le treillis suivant C 8 en est un exemple. C'est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante<sup>(4)</sup>. Un diagramme suggestif de ce treillis devrait être situé dans l'espace à quatre dimensions et il est difficile de le représenter clairement dans un plan; aussi, nous contenterons-nous d'une étude algébrique.

Les éléments de C 8 sont  $x_{ijkl}$ ,  $x_{zkl}$ ,  $x_{iz}$ ,  $x_{zz}$  et  $z_{ijk}$  où les indices sont des entiers positifs quelconques. La relation qui est imposée entre ces éléments est la suivante :

**1° on a :**  $x_{ijkl} \leq x_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \leq i'$ ,  $j \leq j'$ ,  $k \leq k'$ ,  $l \leq l'$ .

$x_{ijkl} \leq x_{i'j'z}$  si et seulement si  $i \leq i'$ ,  $j \leq j'$ .

$x_{ijkl} \leq x_{z k' l'}$  si et seulement si  $k \leq k'$ ,  $l \leq l'$ .

<sup>(4)</sup> Un treillis modulaire satisfaisant à la condition de chaîne ascendante satisfait à la condition (I) d'après le théorème 2 du chapitre II de T. Un treillis distributif quelconque satisfait aussi à la condition (I).

$$\begin{aligned}
x_{ij\infty} &\leq x_{i'j'\infty} \text{ si et seulement si } i \leq i', j \leq j'. \\
x_{\infty kl} &\leq x_{\infty k'l'} \text{ si et seulement si } k \leq k', l \leq l'. \\
x_{ijkl} &\leq x_{\infty \infty}. \\
x_{ij\infty} &\leq x_{\infty \infty}. \\
x_{\infty kl} &\leq x_{\infty \infty}. \\
x_{\infty \infty} &\leq x_{\infty \infty}.
\end{aligned}$$

2° on a :  $z_{ijkl} \leq z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \leq i', j < j', k \leq k', l < l'$ .  
ou  $i \leq i', j = j', k \leq k', l = l'$ .

3° on a :  $x_{ijkl} \leq z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \leq i', j \leq j', k \leq k', l \leq l'$ .

4° on a :  $z_{ijkl} \leq x_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \leq i', j < j', k \leq k', l < l'$ .

$$z_{ijkl} \leq x_{i'j'\infty} \text{ si et seulement si } i \leq i', j < j'.$$

$$z_{ijkl} \leq x_{\infty k'l'} \text{ si et seulement si } k \leq k', l < l'.$$

$$z_{ijkl} \leq x_{\infty \infty}.$$

il n'y a pas d'autre cas où deux éléments soient en relation.

*Cette relation est une relation d'ordre :*

1° elle est *réflexive* : la vérification est immédiate quelle que soit la forme de l'élément envisagé.

2° elle est *transitive* : en appelant  $x_1, x_2, x_3$  des éléments de la forme  $x, z_1, z_2, z_3$ , des éléments de la forme  $z$ , on s'assure facilement que

$$x_1 \leq x_2, x_2 \leq x_3 \rightarrow x_1 \leq x_3; \quad x_1 \leq x_2, x_2 \leq z_1 \rightarrow x_1 \leq z_1;$$

$$x_1 \leq z_2, z_2 \leq x_3 \rightarrow x_1 \leq x_3; \quad x_1 \leq z_2, z_2 \leq z_3 \rightarrow x_1 \leq z_3;$$

$$z_1 \leq x_2, x_2 \leq x_3 \rightarrow z_1 \leq x_3; \quad z_1 \leq x_2, x_2 \leq z_3 \rightarrow z_1 \leq z_3;$$

$$z_1 \leq z_2, z_2 \leq x_3 \rightarrow z_1 \leq x_3; \quad z_1 \leq z_2, z_2 \leq z_3 \rightarrow z_1 \leq z_3.$$

3° elle est *antisymétrique* : On voit que

$$x_1 \leq x_2, x_2 \leq x_1 \rightarrow x_1 = x_2; \quad x_1 \leq z_2, z_2 \leq x_1 \text{ est impossible};$$

$$z_1 \leq z_2, z_2 \leq z_1 \rightarrow z_1 = z_2.$$

L'ensemble partiellement ordonné ainsi défini satisfait à la condition de chaîne descendante comme on le vérifie sans peine.

Il possède un élément zéro,  $x_{1111}$  et un élément universel,  $x_{\infty \infty}$ . On s'assurera que *c'est un treillis complet* en montrant que deux éléments quelconques admettent un plus grand minorant :

1°  $x_{ijkl}$  et  $x_{i'j'k'l'}$  admettent le plus grand minorant  $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$  où  $\alpha = \min(i, i')$ ,  $\beta = \min(j, j')$ ,  $\gamma = \min(k, k')$ ,  $\delta = \min(l, l')$ .

$$x_{ijkl} \text{ et } x_{i'j'\infty} \text{ admettent } x_{\alpha\beta kl}.$$

$$x_{ijkl} \text{ et } x_{\infty k'l'} \text{ admettent } x_{ij\gamma\delta}.$$

$$x_{ij\infty} \text{ et } x_{i'j'\infty} \text{ admettent } x_{\alpha\beta\infty}.$$

$$x_{\infty kl} \text{ et } x_{\infty k'l'} \text{ admettent } x_{\infty\gamma\delta}.$$

$$x_{\infty \infty} \text{ et } x_{\infty \infty} \text{ admettent } x_{\infty \infty}.$$

2° Envisageons les deux éléments  $z_{ijkl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$ .

On a  $z_{abcd} \leq z_{ijkl}$  et  $z_{abcd} \leq z_{i'j'k'l'}$  dans les cas suivants : 1)  $a \leq \alpha, b < \beta, c \leq \gamma, d < \delta$  (où on a encore posé  $\alpha = \min(i, i')$ ,  $\beta = \min(j, j')$ ,  $\gamma = \min(k, k')$ ,  $\delta = \min(l, l')$ ).

$(k, k')$ ,  $\delta = \min(l, l')$ ; 2)  $a \leq \alpha$ ,  $b = j < j'$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d = l < l'$ ; 3)  $a \leq \alpha$ ,  $b = j' < j$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d = l' < l$ ; 4)  $a \leq \alpha$ ,  $b = j = j'$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d = l = l'$ .

On a  $x_{abcd} \leq z_{ijkl}$  et  $x_{abcd} \leq z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $a \leq \alpha$ ,  $b \leq \beta$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d \leq \delta$ .

Il existe toujours un minorant de la forme  $x$  plus grand que tous les autres, c'est  $x_{a\beta\gamma\delta}$ . Il existe également un minorant de la forme  $z$  plus grand que tous les autres, mais il dépend de la valeur relative des indices  $j$  et  $j'$ ,  $l$  et  $l'$  :

1) si  $j = j'$ ,  $l = l'$ , si  $j < j'$ ,  $l < l'$  ou si  $j' < j$ ,  $l' < l$ , c'est  $z_{a\beta\gamma\delta}$ ; sinon c'est  $z_{a\beta'\gamma\delta'}$  (où  $\beta' = \beta - 1$ ,  $\delta' = \delta - 1$ ).

Finalement, il existe un plus grand minorant parmi tous les minorants : c'est  $z_{a\beta\gamma\delta}$  si  $j = j'$ ,  $l = l'$ , si  $j < j'$ ,  $l < l'$  ou si  $j' < j$ ,  $l' < l$ ; c'est  $x_{a\beta\gamma\delta}$  dans tous les autres cas.

3° Envisageons les deux éléments  $x_{ijkl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$ .

On a  $z_{abcd} \leq x_{ijkl}$  et  $z_{abcd} \leq z_{i'j'k'l'}$  si  $a \leq \alpha$ ,  $b < \beta$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d < \delta$  ou si  $a \leq \alpha$ ,  $b = j' < j$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d = l' < l$ .

On a  $x_{abcd} \leq x_{ijkl}$  et  $x_{abcd} \leq z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $a \leq \alpha$ ,  $b \leq \beta$ ,  $c \leq \gamma$ ,  $d \leq \delta$ .

Il existe donc un minorant de la forme  $x$  plus grand que tous les autres, c'est  $x_{a\beta\gamma\delta}$ . Il existe aussi un minorant de la forme  $z$  plus grand que tous les autres, c'est  $z_{a\beta\gamma\delta}$  si  $j' < j$  et  $l' < l$ , c'est  $z_{a\beta'\gamma\delta'}$  dans les autres cas.

Finalement si  $j' < j$  et  $l' < l$ , l'élément  $z_{a\beta\gamma\delta}$  est plus grand minorant; sinon, l'élément  $x_{a\beta\gamma\delta}$  est plus grand minorant.

On voit de la même façon que les éléments  $x_{ij\infty}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  admettent pour plus grand minorant l'élément  $z_{a\beta k'l'}$  si  $j' < j$  et l'élément  $x_{a\beta k'l'}$  si  $j' \geq j$ , et que les éléments  $x_{\infty kl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  admettent pour plus grand minorant l'élément  $z_{i'j'\gamma\delta}$  si  $l' < l$  et l'élément  $x_{i'j'\gamma\delta}$  si  $l' \geq l$ .

On a donc bien affaire à un treillis complet. Nous montrons maintenant que *ce treillis est modulaire*. Nous aurons besoin des plus petits majorants. L'étude duale de celle qui vient d'être faite donne leur expression.

1° Le plus petit majorant de  $x_{ijkl}$  et  $x_{i'j'k'l'}$  est  $x_{a_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$  (où on a posé  $\alpha_1 = \max(i, i')$ ,  $\beta_1 = \max(j, j')$ ,  $\gamma_1 = \max(k, k')$ ,  $\delta_1 = \max(l, l')$ ). On écrit facilement l'expression du plus petit majorant de deux éléments de la forme  $x$  dans les autres cas.

2° Le plus petit majorant de  $z_{ijkl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  est  $z_{a_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$  si  $j = j'$ ,  $l = l'$ , si  $j < j'$ ,  $l < l'$  ou si  $j' < j$ ,  $l' < l$ ; c'est  $x_{a_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$  (où  $\beta'_1 = \beta_1 + 1$ ,  $\delta'_1 = \delta_1 + 1$ ) dans les autres cas.

3° Le plus petit majorant de  $x_{ijkl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  est  $z_{a_1j'\gamma_1l'}$  si  $j' \geq j$  et  $l' \geq l$ ; c'est  $x_{a_1\beta_2\gamma_1\delta_2}$  (où on a posé  $\beta_2 = \max(j, j' + 1)$ ,  $\delta_2 = \max(l, l' + 1)$ ) dans les autres cas.

Le plus petit majorant de  $x_{ij\infty}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  est  $x_{a_1\beta_2\infty}$ ; celui de  $x_{\infty kl}$  et  $z_{i'j'k'l'}$  est  $x_{\infty\gamma_1\delta_2}$ .

Pour établir la modularité, nous montrons qu'il est impossible de trouver des éléments  $u, v, w$  tels que  $u \wedge v < w < v < u \vee w$ . Distinguons plusieurs cas :

1°  $u$  et  $v$  sont de hauteur finie :  $u \vee v$  est alors de hauteur finie et tous les éléments envisagés appartiennent au sous-treillis convexe  $[x_{1111}, u \vee v]$  de longueur finie. On s'assure facilement que ce treillis satisfait aux conditions (1) et (1') :  $x_{ijkl}$  couvre  $x_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \geq i', j \geq j', k \geq k', l \geq l'$  et  $i + j + k + l = i' + j' + k' + l' + 1$ ,  $z_{ijkl}$  couvre  $z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i \geq i', j = j', k \geq k', l = l'$  et  $i + k = i' + k' + 1$ ,  $x_{ijkl}$  couvre  $z_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i = i', j = j' + 1, k = k', l = l' + 1$ ,  $z_{ijkl}$  couvre  $x_{i'j'k'l'}$  si et seulement si  $i = i', j = j', k = k', l = l'$ ; ces remarques faites, on vérifie que si  $x_1$  et  $x_2$  couvrent  $x_1 \wedge x_2$ ,  $x_1 \vee x_2$  couvre  $x_1$  et  $x_2$ , si  $z_1$  et  $z_2$  couvrent  $z_1 \wedge z_2$ ,  $z_1 \vee z_2$  couvre  $z_1$  et  $z_2$  ( $z_1 \wedge z_2$  est nécessairement de la forme  $z$ ), si  $x_1$  et  $z_2$  couvrent  $x_1 \wedge z_2$ ,  $x_1 \vee z_2$  couvre  $x_1$  et  $z_2$  ( $x_1 \wedge z_2$  peut être de la forme  $x$  : quatre cas sont à distinguer, soit  $x_1 \wedge z_2 = x_{ijkl}, z_2 = z_{ijkl}, x_1 = x_{ijkl+1}$  — alors  $x_1 \vee z_2 = x_{ij+1kl+1}$  —, soit  $x_1 \wedge z_2 = x_{ijkl}, z_2 = z_{ijkl}, x_1 = x_{ijk+1l}$  — alors  $x_1 \vee z_2 = z_{ijk+1l}$  —, et deux autres cas analogues;  $x_1 \wedge z_2$  peut être de la forme  $z$  : on a deux cas analogues soit, par exemple,  $x_1 \wedge z_2 = z_{ijkl}, x_1 = x_{ij+1kl+1}, z_2 = z_{ij+1kl}$  — alors  $x_1 \vee z_2 = x_{i+1j+1kl+1}$  —); la condition (1') se vérifie de façon tout à fait analogue, le treillis  $[x_{1111}, x_{ijkl}]$  est d'ailleurs auto-dual. Le treillis  $[x_{1111}, u \vee v]$  est donc modulaire et on ne peut trouver  $w$  satisfaisant aux inégalités précédentes.

2°  $u$  est de hauteur finie et  $v$  de hauteur infinie : on a, par exemple,  $v = x_{ij\infty}$  et  $u = x_{i'j'k'l'}$  ou  $u = z_{i'j'k'l'}$ .

Soit d'abord  $u = x_{i'j'k'l'}$  et  $v = x_{ij\infty}$ . L'élément  $w$  devrait être de l'une des formes  $x_{abcd}, z_{abcd}$  (avec  $a \leq i, b \leq j$ ). On ne peut avoir  $w = x_{ab\infty}$  car, de  $u \vee v = u \vee w$ , on déduit  $\max(i', i) = \max(i', a)$ ,  $\max(j', j) = \max(j', b)$ , et de  $u \wedge v = u \wedge w$ , on déduit  $\min(i', i) = \min(i', a)$ ,  $\min(j', j) = \min(j', b)$ , ce qui entraîne  $i = a, j = b$ . On ne peut avoir  $w = x_{abcd}$  pour la même raison. On ne peut avoir  $w = z_{abcd}$  car  $u \vee w$  serait de hauteur finie.

Soit maintenant  $u = z_{i'j'k'l'}$  et  $v = x_{ij\infty}$ . L'élément  $w$  devrait être de l'une des formes précédentes. Il ne peut être de l'une des deux dernières car  $u \vee w$  serait de hauteur finie. On ne peut pas non plus avoir  $w = x_{ab\infty}$  : de  $u \vee v = u \vee w$ , on déduit  $\max(i', i) = \max(i', a)$  et  $\max(j' + 1, j) = \max(j' + 1, b)$ ; de  $u \wedge v = u \wedge w$ , on déduit d'une part  $\min(i', i) = \min(i', a)$ , d'autre part qu'on doit avoir  $j' < b < j$  ou  $b < j \leq j'$ ; il faut déjà  $a = i$ ; de plus, si  $j' < b < j$ , on a  $j = \max(j' + 1, j) = \max(j' + 1, b) = b$ , si  $b < j \leq j'$ ,  $u \wedge v$  est de la forme  $x$  et on a  $j = \min(j', j) = \min(j', b) = b$ .

3°  $u$  est de hauteur infinie et  $v$  de hauteur finie : on a, par exemple,  $u = x_{i\infty}$  et  $v = x_{i'j'k'l'}$  ou  $v = z_{i'j'k'l'}$ .

Soit d'abord  $u = x_{i\infty}$  et  $v = x_{i'j'k'l'}$ . L'élément  $w$  devrait être de l'une des formes  $x_{abcd}$  (avec  $a \leq i', b \leq j', c \leq k', d \leq l'$ ) ou  $z_{abcd}$  (avec  $a \leq i', b < j', c \leq k', d < l'$ ). On ne peut avoir  $w = x_{abcd}$  car  $u \wedge v = u \wedge w$

impose  $c = k'$ ,  $d = l'$ ,  $\min(i, i') = \min(i, a)$ ,  $\min(j, j') = \min(j, b)$  et  $u \vee v = u \vee w$  impose  $\max(i, i') = \max(i, a)$  et  $\max(j, j') = \max(j, b)$ , d'où  $a = i'$ ,  $b = j'$ . On ne peut avoir non plus  $w = z_{abcd}$  car  $u \wedge v = u \wedge w$  impose  $l' = d$  en contradiction avec  $d < l'$ .

Soit maintenant  $u = x_{ij\infty}$  et  $v = z_{i'j'k'l'}$ . L'élément  $w$  devrait être de l'une des formes  $x_{abcd}$  (avec  $a \leq i'$ ,  $b \leq j'$ ,  $c \leq k'$ ,  $d \leq l'$ ) ou  $z_{abcd}$  (avec  $a \leq i'$ ,  $b < j'$ ,  $c \leq k'$ ,  $d < l'$  ou  $a \leq i'$ ,  $b = j'$ ,  $c \leq k'$ ,  $d = l'$ ). La forme  $x_{abcd}$  ne peut pas convenir : de  $u \wedge v = u \wedge w$ , on déduit  $j' \geq j$  pour que  $u \wedge v$  soit de la forme  $x$ ,  $j = \min(j, j') = \min(j, b)$  soit  $j \leq b$ ; de  $u \vee v = u \vee w$ , on déduit  $j' + 1 = \max(j, j' + 1) = \max(j, b) = b$  qui contredit  $b \leq j'$ . La forme  $z_{abcd}$  ne convient pas davantage :  $u \wedge v = u \wedge w$  impose d'abord  $c = k'$ ,  $d = l'$ , donc  $b = j'$ , puis  $\min(i, i') = \min(i, a)$ ;  $u \vee v = u \vee w$  impose  $\max(i, i') = \max(i, a)$ , d'où  $a = i'$ .

4°  $u$  et  $v$  sont de hauteur infinie : on a, par exemple,  $u = x_{ij\infty}$  et  $v = x_{i'j'\infty}$  ou  $v = x_{\infty k' l'}$ .

Si  $u = x_{ij\infty}$  et  $v = x_{i'j'\infty}$ , il faut prendre  $w$  de la forme  $x_{ab\infty}$  sans quoi  $u \wedge w$  serait de hauteur finie; on voit immédiatement que c'est impossible.

Si  $u = x_{ij\infty}$  et  $v = x_{\infty k' l'}$ , on a  $u \vee v = x_{\infty \infty}$ , il faut donc prendre  $w$  de la forme  $x_{\infty cd}$  et c'est impossible.

Finalement, le treillis C 8 est un treillis complet modulaire satisfaisant à la condition de chaîne descendante. *Il ne satisfait pas à la condition (I)* car le couple  $(x_{11\infty}, x_{\infty 11})$  ne possède pas la propriété  $i$  : en effet, la chaîne  $\{(x_{1111}, x_{1111}) < (x_{1121}, x_{1111}) < (x_{1121}, x_{2111}) < \dots < (x_{11n1}, x_{n111}) < (x_{11n+11}, x_{n111}) < \dots < (x_{11\infty}, x_{\infty 11})\}$  maximale dans le produit cardinal  $[x_{1111}, x_{11\infty}] \times [x_{1111}, x_{\infty 11}]$  est obtenue à partir de la chaîne  $\{z_{1111} < z_{1121} < z_{2121} < \dots < z_{n1n1} < z_{n1n+11} < \dots < x_{\infty \infty}\}$  non maximale entre  $x_{1111}$  et  $x_{\infty \infty}$  puisqu'elle ne contient pas l'élément  $x_{1111}$ .

b) Les théorèmes 4 et 5 montrent que, parmi les treillis satisfaisant à une condition de chaîne, les treillis modulaires sont caractérisés par l'un quelconque des couples de conditions :  $(\alpha_i)$  et  $(\alpha'_i)$ ,  $(\alpha^i)$  et  $(\alpha'^i)$ , (R) et (R'), (F) et (F'), (S) et (S'), (L) et (L'), (B) et (B'),  $(\alpha)$  et  $(\alpha')$ , (M) et (M').

Les exemples suivants montrent qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et à un des couples de conditions  $(2_i)$  et  $(2'_i)$ ,  $(2^i)$  et  $(2'^i)$ ,  $(J_1)$  et  $(J'_1)$ ,  $(1_i)$  et  $(1'_i)$ ,  $(1^i)$  et  $(1'^i)$ ,  $(5)$  et  $(5')$ ,  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$ ,  $(\beta)$  et  $(\beta')$ ,  $(J)$  et  $(J')$ ,  $(6)$  et  $(6')$ ,  $(2)$  et  $(2')$ ,  $(1)$  et  $(1')$ ,  $(3)$  et  $(3')$  n'est pas nécessairement modulaire.

1) B 3 : Ce treillis a été étudié au chapitre II de T. Il satisfait à la condition  $(\gamma)$ . Son dual est le treillis C 3 également étudié au chapitre II de T. Il satisfait aussi à la condition  $(\gamma)$ .

2) B 7 : Les éléments du treillis B 7 sont  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  et  $d$ , où  $i$  et  $j$  sont des indices entiers positifs quelconques. Le diagramme représente un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante.

Deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition ( $\alpha$ ) : les couples d'éléments  $(a_{ij}, a'_{i'j'})$ ,  $(a_{ij}, b'_{i'j'})$ ,  $(a_{ij}, c'_{i'j'})$ ,  $(b_{ij}, b'_{i'j'})$ ,  $(c_{ij}, c'_{i'j'})$  possèdent manifestement la propriété  $a$  et il en est de même des couples symétriques; les couples  $(b_{ij}, c'_{i'j'})$  et les couples symétriques ne la possèdent pas. On peut en dire autant pour la propriété  $b$ ; le treillis B 7 satisfait donc à la condition ( $\beta$ ). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'_{0j}$ ,  $a'_{i0}$ ,  $a'_{00}$ ,  $b'_{0j}$ ,  $b'_{i0}$ ,  $b'_{00}$ ,  $c'_{0j}$ ,  $c'_{i0}$ ,  $c'_{00}$ . Ce dernier treillis ne satisfait pas à la condition (1); donc, le treillis B 7 ne satisfait pas à la condition (1'). Il ne satisfait pas à la condition (6) car on a  $b_{11} \wedge c_{11} = c_{21} \wedge b_{11} = d$ ,  $b_{11} \vee c_{21} = b_{11} \vee c_{11} = a_{11}$  et pour tout élément  $x$  tel que  $d < x \leq b_{11}$ , on a  $(x \vee c_{21}) \wedge c_{11} = c_{11}$ . Il ne satisfait pas à la condition (J) car le couple  $(b_{12}, c_{21})$  ne possède pas la propriété  $j'$  : la chaîne  $\{(d, d) < (b_{1n}, d) < (b_{12}, c_{2m})\}$  (où  $n$  décroît jusqu'à 2 et  $m$  décroît jusqu'à 1) est maximale dans le produit cardinal  $[d, b_{12}] \times [d, c_{21}]$ ; elle est obtenue à partir de la chaîne  $\{d < b_{1n} < a_{1m}\}$  et seulement à partir de cette chaîne ou de celle qu'on obtient en remplaçant  $b_{12}$  par  $b_{11}$  et ces deux chaînes sont non maximales entre  $d$  et  $a_{11}$ .

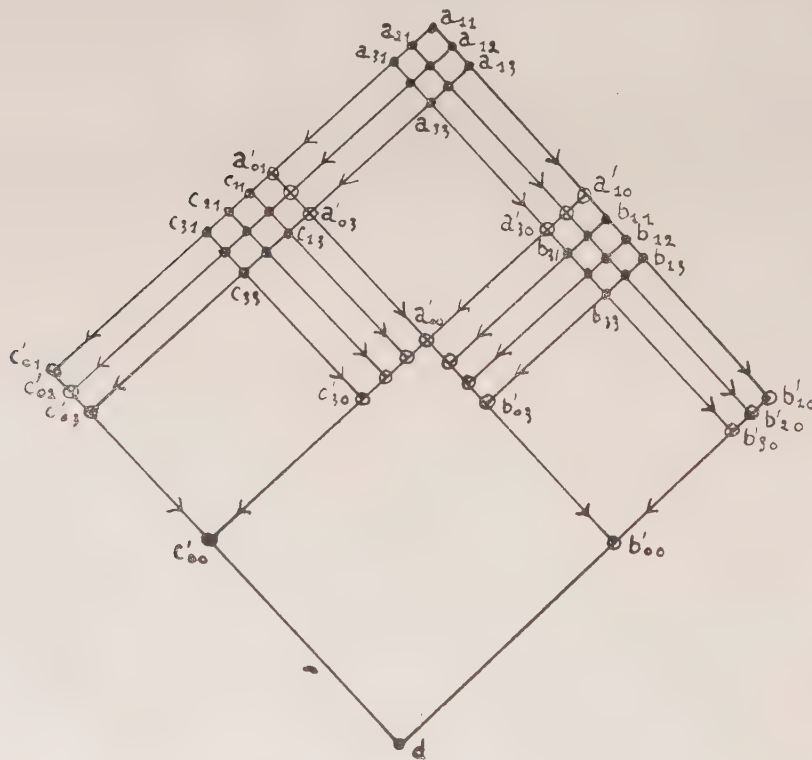


FIG. 6

Le treillis B 7 satisfait donc aux conditions  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha')$ , (R), (I), (F),  $(2')$ , (B), (J),  $(1')$ , (5), (6).

Le dual du treillis B 7 est le treillis suivant C 6. Il satisfait à la condition (S) : les couples d'éléments  $(a_{ij}, a'_{i'j'})$ ,  $(a_{ij}, b'_{i'j'})$ ,  $(a_{ij}, c'_{i'j'})$ ,  $(b_{ij}, b'_{i'j'})$ ,  $(c_{ij}, c'_{i'j'})$  possèdent la propriété  $s$  et il en est de même des couples  $(b_{ij}, c'_{i'j'})$ . Il ne satisfait pas à la condition  $(\gamma)$  car le couple  $(b_{11}, c_{21})$  possède la propriété  $c$  et le couple  $(c_{21}, b_{11})$  ne la possède pas. Il ne satisfait pas à la condition  $(1_i)$ .

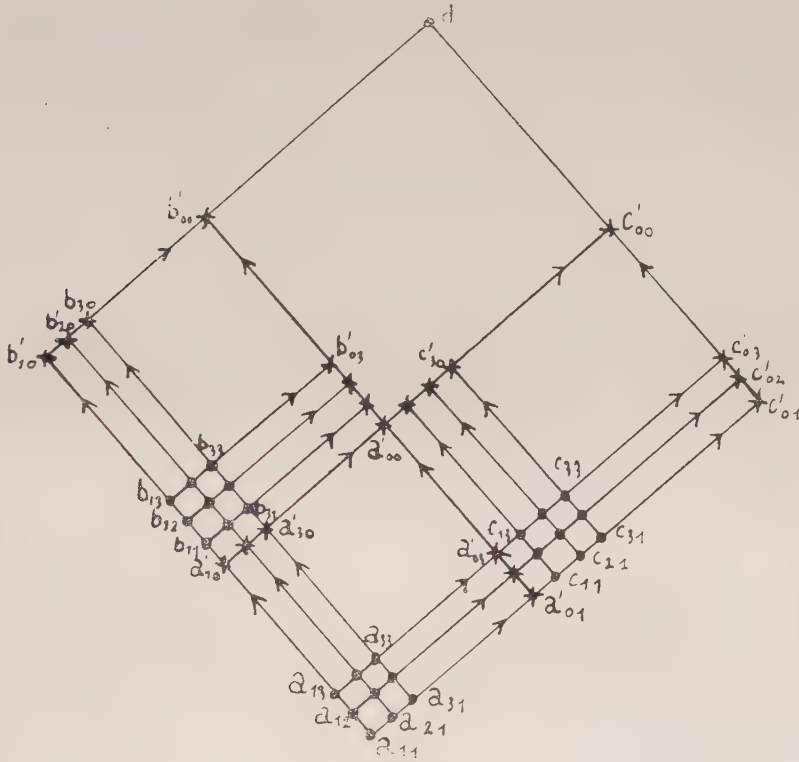


FIG. 7

Finalement, le treillis C 6 satisfait aux conditions (S),  $(\beta)$ , (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha)$ , (R), (I),  $(2_i)$ , (L),  $(1_i)$ ,  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ .

Le treillis B 7 et son dual satisfont aux conditions  $(\beta)$ , (2), (1).

3) B 11 : Ce treillis a été étudié au chapitre II de T. Il satisfait aux conditions  $(2')$ ,  $(1')$ , (5), (6), (2), (1), (3).

Étudions son dual C 7. Il satisfait à la condition (2). Il ne satisfait pas à la condition  $(\gamma)$  car le couple  $(b_{10}, a_{01})$  ne possède pas la propriété  $c$  alors que le couple symétrique la possède. Il ne satisfait pas à la condition  $(1_i)$  car  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  couvrent  $a'_{00}$  alors que  $b_{00}$  ne les couvre pas. Il ne satisfait pas

à la condition (S) car le couple  $(a_{01}, a_{10})$  ne vérifie pas la propriété  $\alpha$  : la chaîne  $\{(a_{11}, a_{11}) < \dots < (a_{n1}, a_{1n}) < (a_{n+11}, a_{1n}) < \dots < (a_{01}, a_{10})\}$  maximale dans le produit cardinal  $[a_{11}, a_{01}] \times [a_{11}, a_{10}]$  peut être obtenue à partir d'une chaîne entre  $a_{11}$  et  $b_{00}$  mais ne peut l'être à partir d'une chaîne maximale.

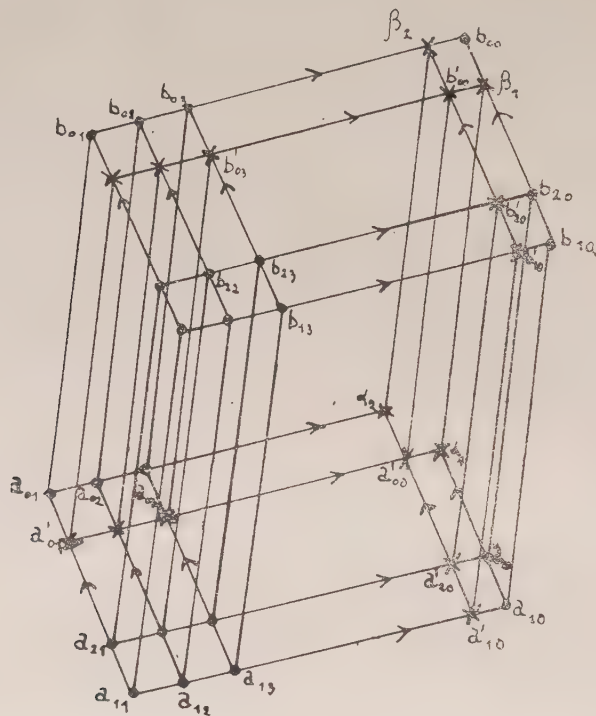


FIG. 8

Le treillis C 7 satisfait donc aux conditions  $(\beta)$ ,  $(2)$  et  $(1)$ . Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha_i)$ ,  $(R)$ ,  $(I)$ ,  $(2_i)$ ,  $(S)$ ,  $(L)$ ,  $(1_i)$ ,  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ .

Le treillis B 11 et son dual satisfont aux conditions  $(2^i)$ ,  $(1^i)$ ,  $(5)$ ,  $(6)$ ,  $(2)$ ,  $(1)$ ,  $(3)$ .

4) B 8 : Les éléments de ce treillis sont  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$ ,  $d_i$ ,  $e_j$ ,  $f$  et  $g$  où les indices sont des entiers positifs quelconques. On voit aisément qu'il s'agit bien d'un treillis complet qui satisfait à la condition de chaîne ascendante. Il satisfait à la condition  $(2)$ . Il ne satisfait pas à la condition  $(\gamma)$  ni à la condition  $(\alpha)$  car le couple  $(c_1, d_1)$  ne possède ni la propriété  $c$  ni la propriété  $a$  alors que le couple  $(d_1, c_1)$  les possède. Il ne satisfait pas à la condition  $(J)$  car le couple  $(e_1, d_1)$  ne possède pas la propriété  $j$  : la chaîne  $\{(g, g) < \dots < (e_n, d_n) < (e_n, d_{n-1}) < \dots < (e_1, d_1)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[g, e_1] \times [g, d_1]$  est obtenue à partir de la chaîne  $\{g < \dots < a_{nn} <$



ne satisfait pas à la condition (1') car  $d'_0$  et  $e'_0$  couvrent  $g$  sans que  $a'_0$  couvre  $d'_0$  et  $e'_0$ .

Le treillis B 8 satisfait aux conditions (2) et (1). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha')$ , (R), (I), (F), (2'), (B), (J), (1'), (5),  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (6).

Son dual C 10 (voir page précédente) satisfait à la condition  $(\alpha_i)$  car les seuls couples d'éléments du treillis des idéaux ne possédant pas la propriété  $a$  sont les couples  $(d_i, e_i)$  et les couples symétriques. Il satisfait aux conditions (R) et (I), donc ainsi à toutes les conditions étudiées.

Le treillis B 8 et son dual satisfont donc aux conditions  $(2_i)$ ,  $(1_i)$ , (2), (1), (3).

5) B 2 : Ce treillis et son dual ont été étudiés au chapitre II de T. Ils satisfont aux conditions (J) et (1).

c) Les exemples suivants montrent que, parmi les treillis quelconques (même complets), l'un des couples de conditions  $(\alpha_i)$  et  $(\alpha'_i)$ , (R) et (R'), (F) et (F'), (S) et (S'), (L) et (L'), (B) et (B'),  $(\alpha)$  et  $(\alpha')$ , (M) et (M') ne suffit pas à caractériser les treillis modulaires (5).

1) A 6 : Les éléments du treillis A 6 sont ceux des chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_i\}$  où les indices sont des entiers relatifs quelconques et les éléments  $c$  et  $d$ . On a manifestement affaire à un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux et celui des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux  $a'$  et  $b'$ . Le treillis A 6 est auto-dual. Il satisfait aux conditions  $(\alpha_i)$ , (R), (I),  $(\beta)$ , mais il ne satisfait pas à la condition (6) car on a  $a_0 \wedge b_0 = a_0 \wedge b_1 = d$ ,  $a_0 \vee b_0 = a_0 \vee b_1 = c$  et pour tout  $x$  tel que  $d < x \leq a_0$ , on a  $(x \vee b_0) \wedge b_1 = b_1$ . Il ne satisfait pas à la condition (1').

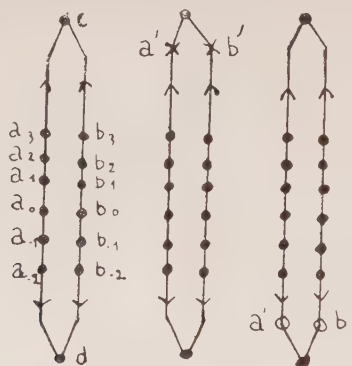


FIG. 11

Finalement, le treillis A 6 satisfait aux conditions suivantes et à leurs duales :  $(\alpha_i)$ , (R), (I),  $(2_i)$ , (S), (L), (J),  $(1_i)$ ,  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\beta)$ , (M), (2), (1), (3). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha')$ , (F),  $(2')$ , (B),  $(1')$ , (5), (6).

(5) La question reste ouverte en ce qui concerne le couple  $(\alpha')$  et  $(\alpha'')$ .

2) A 2 : Les éléments du treillis A 2 sont  $a_{ij}, b_{ij}, c_i, d_j, e$  où les indices sont des entiers positifs quelconques. On vérifie facilement que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant, puis qu'il en est de même d'une famille quelconque d'éléments. Le diagramme étant auto-dual, il représente un treillis complet auto-dual. Ce treillis satisfait à la condition (S) car les couples d'éléments  $(a_{ij}, a_{i'j'}), (a_{ij}, b_{i'j'}), (a_{ij}, c_{i'}), (a_{ij}, d_{j'}), (b_{ij}, b_{i'j'}), (b_{ij}, c_{i'}), (b_{ij}, d_{j'})$  vérifient manifestement la propriété  $s$  et il en est de même des couples  $(a_{ij}, e)$  et  $(b_{ij}, e)$  (ces derniers ne vérifient pas la propriété  $r$ ). Il satisfait à la condition (F) : on voit que les couples précédents possèdent la propriété  $f$ . Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha)$  et  $(\gamma)$  car le couple  $(e, a_{11})$  possède les propriétés  $a$  et  $c$  que ne possède pas le couple  $(a_{11}, e)$ .

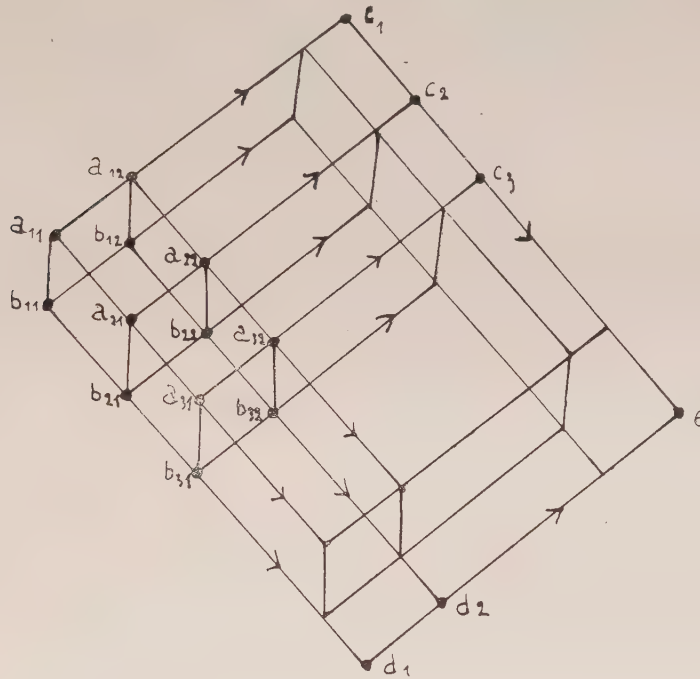


FIG. 12

On obtient le treillis des idéaux (voir page suivante) en ajoutant les idéaux non principaux  $a'_{i0}, b'_{i0}$  et  $d'$ . Ce treillis satisfait à la condition (1) mais non à la condition (2) car  $e$  couvre  $d' = e \wedge b'_{10}$  et  $c_1 = e \vee b'_{10}$  ne couvre pas  $b'_{10}$ .

On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments  $a'_{0j}, b'_{0j}$  et  $c'$ . Ce treillis satisfait à la condition (2).

Le treillis A 2 satisfait donc aux conditions suivantes et à leurs duales : (F),  $(2')$ , (S), (B), (J),  $(1_i)$ ,  $(1')$ , (5),  $(\beta)$ , (M), (6),  $(2)$ ,  $(1)$ , (3). Il ne satisfait pas aux conditions  $(\alpha_i)$ ,  $(\alpha')$ , (R), (I),  $(2_i)$ , (L),  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$ .

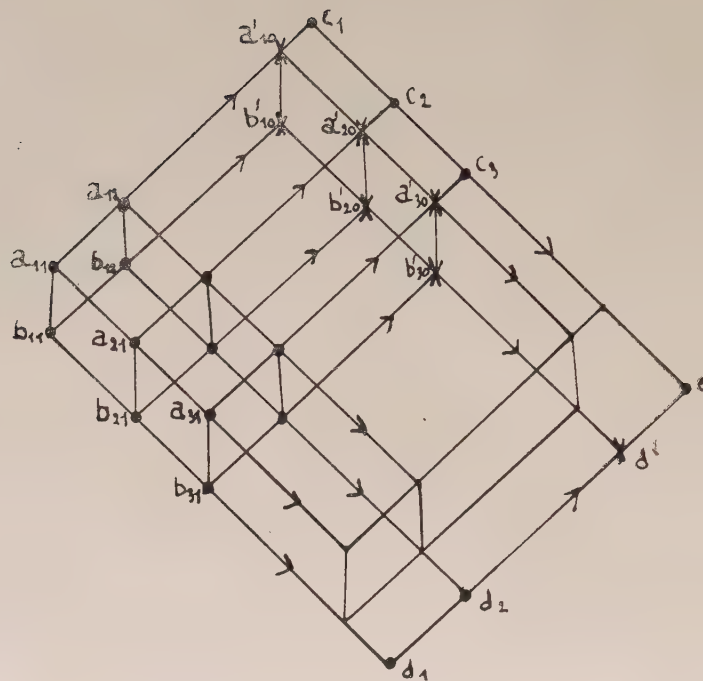


FIG. 13

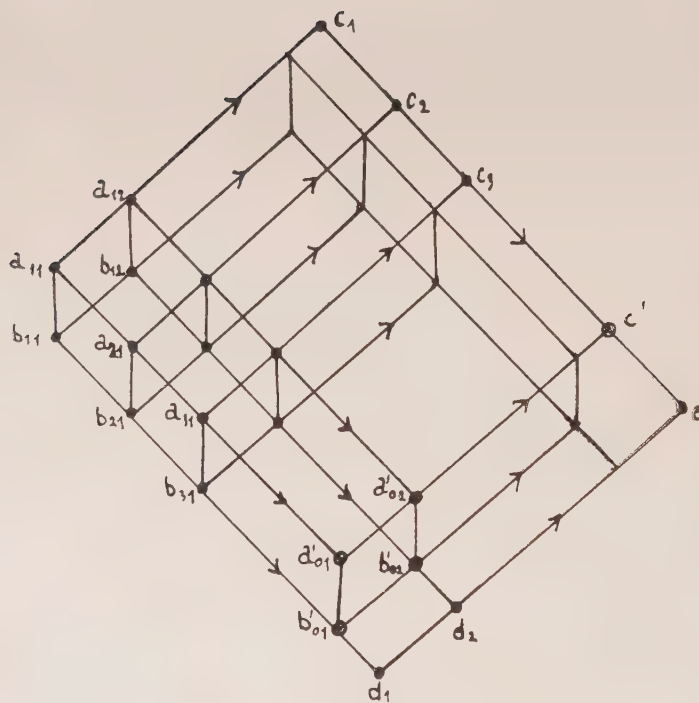


FIG. 14

## CHAPITRE II

### Application aux treillis complémentés.

#### 1. PROPRIÉTÉ (II).

Dans un treillis avec élément zéro, pour qu'on puisse parler avec intérêt de famille (finie) d'éléments indépendants, il est nécessaire que cette notion ne dépende pas de l'ordre dans lequel on énonce ces éléments.

Il est donc nécessaire que la propriété suivante qui traduit cette exigence pour une famille de trois éléments soit vérifiée :

$$(\Pi) \quad x_1 \wedge x_2 = 0 \text{ et } (x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0 \rightarrow (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = 0.$$

Réciproquement, dans un treillis avec élément zéro qui possède la propriété (II), la symétrie de la notion d'indépendance a lieu pour toute famille finie d'éléments. On l'établit aisément par récurrence :

Supposons cette symétrie vérifiée pour toute famille de  $n-1$  éléments et soit une famille de  $n$  éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  telle qu'on ait (s'il en existe) :

$$(\bigvee_{i < j} x_i) \wedge x_j = 0 \text{ pour tout } j = 2, \dots, n. \quad (\xi)$$

Il suffit de montrer qu'on a, pour tout indice  $k < n$ ,

$$(\bigvee_{i \neq k} x_i) \wedge x_k = 0.$$

Or, on a  $(\bigvee_{i \neq k, n} x_i) \wedge x_k = 0$ , puisque la famille des  $n-1$  éléments

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  est supposée posséder la propriété de symétrie. L'égalité à établir résulte de cette égalité et de l'égalité  $(\xi)$  pour  $j = n$ , compte-tenu de la propriété (II).

La propriété (II) est vérifiée par un treillis modulaire quelconque (à élément zéro) : en effet, on a, dans un tel treillis,

$[(x_1 \vee x_3) \wedge x_2] \vee x_1 = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1) = x_1 \vee [x_3 \wedge (x_2 \vee x_1)] = x_1$ ,  
puisque le crochet est l'élément zéro d'après l'hypothèse. On en déduit

$$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2 \leq x_1, \text{ d'où } (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = x_1 \wedge x_2 = 0.$$

Cette propriété n'est pas vérifiée par tout treillis semi-modulaire de longueur finie <sup>(1)</sup>.

#### 2. PROPRIÉTÉ $\overline{(\Pi)}$ .

Il existe toutefois une propriété plus faible que la propriété (II), suffisante dans certaines applications de la théorie de l'indépendance qui est conséquence de la semi-modularité dans un treillis de longueur finie.

---

(1) Elle ne l'est pas par le treillis 7b de G. BIRKHOFF [1], p. 106, ni par le treillis des partitions d'un ensemble à quatre éléments (voir la fin du § 2). Il existe par contre des treillis de longueur finie non semi-modulaires qui possèdent la propriété  $\overline{(\Pi)}$  : citons le treillis non modulaire à cinq éléments.

Cette propriété est la suivante :

(II)  $x_1 \wedge x_2 = 0, (x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0$  et  $x_3$  couvre  $0 \rightarrow (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = 0$  <sup>(2)</sup>.

THÉOREME 1. — Dans un treillis quelconque (avec élément zéro), la condition (2) entraîne la propriété (II).

Soit un treillis avec élément zéro satisfaisant à la condition (2). Soient trois éléments  $x_1, x_2, x_3$  satisfaisant à l'hypothèse de la propriété (II). Supposons qu'on ait  $(x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = a > 0$ . De  $a \leq x_2$ , on déduit  $x_1 \vee a \leq x_1 \vee x_2$ . D'autre part, on a  $x_1 \leq x_1 \vee a \leq x_1 \vee x_3$ . Or,  $x_3$  couvre  $x_2 \wedge x_3 = 0$ . D'après la condition (2),  $x_1 \vee x_3$  couvre  $x_1$ . On a donc, ou bien  $x_1 \vee a = x_1$ , ou bien  $x_1 \vee a = x_1 \vee x_3$ . Dans le premier cas, on déduit  $a \leq x_1$  d'où  $a \leq x_1 \wedge x_2 = 0$ , en contradiction avec la supposition faite. Dans le deuxième cas, on déduit  $x_3 \leq x_1 \vee a \leq x_1 \vee x_2$ , en contradiction avec l'égalité  $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0$ , ce qui achève d'établir le résultat envisagé.

La propriété (II) suffit en particulier dans la démonstration du théorème 13 de G. Birkhoff, p. 129 et permet d'en déduire le théorème suivant <sup>(3)</sup> :

THÉOREME 2. — Dans un treillis  $T$  complet satisfaisant à la condition (II) et à la condition de  $\wedge$ -continuité :

$$y_i \uparrow y \rightarrow x \wedge y_i \uparrow x \wedge y \text{ <sup>(4)</sup>}$$

la condition (L7') L'élément universel est union de points

entraîne (L7) Tout élément possède au moins un complément;

la condition (L7R') Tout élément est union de points

entraîne (L7R) Tout élément d'un sous-treillis  $[a, b]$  admet au moins un complément dans ce sous-treillis <sup>(5)</sup>.

(2) La propriété (II) est intimement liée à l'axiome d'échange de Steinitz et Mac Lane. Elle est en effet entraînée (dans les treillis quelconques) par la forme suivante de cet axiome

$$(2) \text{ on n'a pas } p < x > x \vee p \text{ couvre } x$$

et elle entraîne la forme

$$\text{<sup>(2)</sup>} \quad x < x \vee p \leq x \vee q \rightarrow x \vee p = x \vee q$$

Les réciproques ne sont pas vraies en toute généralité. La première l'est en présence de l'axiome (G<sub>1</sub>) de S. Mac Lane [1], la seconde en présence de l'axiome suivant plus faible :

Pour tout  $x$ , il existe  $p$  tel que l'on ait  $p \leq x$

vérifié en particulier si la condition de chaîne descendante est satisfaite.

(3) Elle suffit évidemment aussi à chaque fois que l'on se borne à considérer l'indépendance de familles de points.

(4) G. BIRKHOFF [1], p. 40. On écrit  $y_i \uparrow y$  si la famille  $\{y_i\}$  constitue un ensemble filtrant supérieurement, c'est-à-dire si deux éléments de la famille ont toujours un majorant commun dans la famille, et si on a  $y = \bigvee y_i$ .

(5) Pour les treillis de longueur finie qui sont évidemment complets et vérifient trivialement la  $\wedge$ -continuité, ceci résulte du théorème 6 de G. BIRKHOFF [1], p. 105. Avec les hypothèses du théorème 2, la condition (L7') n'entraîne pas (L7R) et (L7R') comme le montre le contre exemple 7b de G. BIRKHOFF [1], p. 106. Le théorème 2 a été démontré indépendamment par L. Lesieur à partir de l'axiome d'échange (2).

On établit la première partie du théorème comme dans la démonstration du théorème 13 de G. Birkhoff où le fait que le treillis est modulaire n'intervient que par la propriété (II).

On établit la deuxième partie de la manière suivante : Soit un sous-treillis convexe  $[a, b]$ . Il satisfait à la condition (2). Il est évidemment complet et satisfait à la condition de  $\bigwedge$  — continuité. Il satisfait à la condition (L7') ; en effet, dans le treillis T,  $b$  est union de points  $p_i$  ; on a  $b = (\bigvee p_i) \vee a = \bigvee (p_i \vee a)$  ; les éléments  $p_i \vee a$  distincts de  $a$  sont des points dans le treillis  $[a, b]$  car dans le treillis T,  $p_i$  couvre  $p_i \wedge a = 0$  donc  $p_i \vee a$  couvre  $a$ . Il suffit alors d'appliquer la première partie du théorème.

Un exemple important de treillis satisfaisant à la propriété (II) et non à la propriété (II), ainsi qu'aux hypothèses du théorème 2 est constitué par le treillis des relations d'équivalence sur un ensemble quelconque E.

Ce treillis satisfait à (II) <sup>(6)</sup> : Soient trois relations d'équivalence sur E,  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  telles que l'on ait  $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 = 0$ ,  $(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) \wedge \mathcal{R}_3 = 0$ ,  $\mathcal{R}_3$  est un point c'est-à-dire qu'il existe seulement deux éléments distincts soit  $a$  et  $b$ , appartenant à E, avec  $a \equiv b (\mathcal{R}_3)$ . Nous montrons que l'on a  $(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3) \wedge \mathcal{R}_2 = 0$ . Pour cela, envisageons deux éléments  $x$  et  $y$  de E tels que  $x \equiv y (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3)$  et  $x \equiv y (\mathcal{R}_2)$ . Puisque l'on a  $x \equiv y (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3)$ , il existe une suite finie d'éléments de E soit  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tels que  $x_1 = z_1 \equiv z_2 (\mathcal{R}_1)$ ,  $z_2 \equiv z_3 (\mathcal{R}_3)$ ,  $\dots, z_{n-1} \equiv z_n = y (\mathcal{R}_2)$  où  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_3$  interviennent alternativement. Si l'on convient, ce qui est légitime, que deux des éléments  $z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$  sont toujours distincts, on voit que  $\mathcal{R}_3$  ne peut intervenir qu'une fois. Si  $\mathcal{R}_3$  n'intervient pas, on a  $x \equiv y (\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)$  d'où  $x = y$ . Si  $\mathcal{R}_3$  intervient une fois, on a  $x \equiv a (\mathcal{R}_1)$ ,  $a \equiv b (\mathcal{R}_3)$ ,  $b \equiv y (\mathcal{R}_1)$  par exemple, d'où on déduit  $a \equiv b (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$  et  $a \equiv b (\mathcal{R}_3)$  donc  $a = b$  en contradiction avec ce qui précède. Le résultat est établi.

Ce treillis ne satisfait pas à (II). Prenons pour E un ensemble à quatre éléments et soient les partitions définies par  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  conformes au graphique ci-dessous. On voit immédiatement que (II) est en défaut.

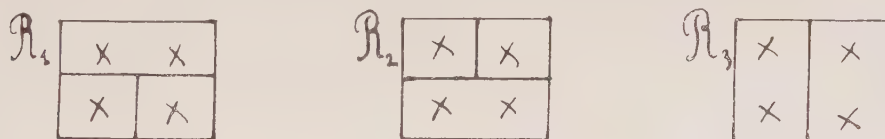


FIG. 15

On sait que ce treillis est complet et qu'il satisfait à la condition (2), ainsi qu'aux conditions (L7') et (L7R'). Il satisfait aussi à la condition de  $\bigwedge$  — continuité : Soit  $\{\mathcal{R}_i\}$  une famille dirigée de relations d'équivalence

(6) Il satisfait d'ailleurs à la condition plus forte (2).

telles que  $\mathcal{R}_\iota \uparrow \mathcal{R}$  et soit  $\rho$  une relation d'équivalence quelconque. On a  $\rho \wedge \mathcal{R}_\iota \uparrow \rho \wedge \mathcal{R}$ . En effet, si on a  $x \equiv y \ (\rho \wedge \mathcal{R})$ , on a  $x \equiv y \ (\rho)$  et  $x \equiv y \ (\mathcal{R})$ ; il existe donc une valeur de  $\iota$  telle que  $x \equiv y \ (\mathcal{R}_\iota)$  (on a  $x \equiv y \ (\mathcal{R})$  si et seulement si  $x \equiv y \ (\mathcal{R}_\iota)$  pour un certain  $\iota$ ); on a alors  $x \equiv y \ (\rho \wedge \mathcal{R}_\iota)$  ce qui montre que  $\rho \wedge \mathcal{R}_\iota \uparrow \rho \wedge \mathcal{R}$ .

### CHÂPITRE III

#### Etude de la permanence des différentes conditions de semi-modularité par passage aux sous-treillis, produits cardinaux, treillis homomorphes.

##### 1. PASSAGE AUX SOUS-TREILLIS.

Il est trivial que la propriété de semi-modularité d'un treillis de longueur finie ne se conserve pas nécessairement lorsqu'on passe à un sous-treillis quelconque. Aucune des conditions envisagées dans T ne se conserve donc généralement par passage d'un treillis à un de ses sous-treillis.

Toutefois, on sait qu'un sous-treillis convexe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie est semi-modulaire<sup>(1)</sup>. La propriété s'étend facilement par le théorème suivant :

**THÉOREME 1.** — *Chacune des conditions étudiées se conserve par passage d'un treillis à l'un quelconque de ses sous-treillis convexes.*

L'affirmation est à peu près triviale en ce qui concerne les conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J<sub>1</sub>), (5), ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ), ( $\beta$ ), (M), (J), (6), (2), (1), (3). Elle est une conséquence immédiate du lemme suivant pour les conditions ( $\alpha_i$ ), ( $2_i$ ), ( $1_i$ ) et du lemme dual pour les conditions ( $\alpha^i$ ), ( $2^i$ ), ( $1^i$ ).

**LEMME 1.** — *Le treillis des idéaux  $C_i$  d'un sous-treillis convexe C d'un treillis T est isomorphe à un sous-treillis convexe du treillis des idéaux  $T_i$  de T.*

A chaque idéal  $\mathcal{Q}$  du treillis C, faisons correspondre l'ensemble  $\mathcal{X}$  des éléments  $x$  de T tels qu'il existe  $a \in \mathcal{Q}$  pour lequel on ait  $x \leq a$ . L'ensemble  $\mathcal{X}$  est un idéal de T : si on a  $x' \leq x$  et  $x \in \mathcal{X}$ , on a, pour un certain  $a \in \mathcal{Q}$ ,  $x' \leq x \leq a$ , d'où  $x' \in \mathcal{X}$ ; si on a  $x_1 \in \mathcal{X}$  et  $x_2 \in \mathcal{X}$ , on a, pour certains éléments  $a_1, a_2 \in \mathcal{Q}$ ,  $x_1 \leq a_1$ ,  $x_2 \leq a_2$ , d'où  $x_1 \vee x_2 \leq a_1 \vee a_2$ ; or  $a_1 \vee a_2$  appartient à C qui est un sous-treillis de T donc à  $\mathcal{Q}$  qui est un idéal de C, si bien que  $x_1 \vee x_2$  appartient à  $\mathcal{X}$ .

L'application  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$  est biunivoque : si on a  $\mathcal{Q}_1 \neq \mathcal{Q}_2$ , il existe au moins par exemple un élément  $a_1$  tel que l'on ait  $a_1 \in \mathcal{Q}_1$  et que l'on ait pas  $a_1 \in \mathcal{Q}_2$ ; on a alors  $a_1 \in \mathcal{X}_1$ , et on n'a pas  $a_1 \in \mathcal{X}_2$  car il existerait  $a_2 \in \mathcal{Q}_2$  tel que  $a_1 \leq a_2$  en contradiction avec le fait que l'on a pas  $a_1 \in \mathcal{Q}_2$ .

L'ensemble  $C'_i$  des  $\mathcal{X}$  est un sous-treillis de  $T_i$  : si  $\mathcal{X}_1 \in C'_i$ ,  $\mathcal{X}_2 \in C'_i$ , on a aussi  $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2 \in C'_i$  et  $\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2 \in C'_i$ ;  $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2$  qui est l'ensemble  $x$  de T tels qu'il existe  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{X}_2$  avec  $x \leq x_1 \vee x_2$  est obtenu à partir de  $\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2$ ;  $\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2$  qui est l'ensemble des éléments  $x$  de T tels

(1) G. BIRKHOFF [1], p. 103.

qu'il existe  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{X}_2$  avec  $x \leq x_1 \wedge x_2$  est obtenu à partir de  $\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2$ .

Le sous-treillis  $C'_i$  de  $T_i$  est convexe; si  $\mathcal{X}_1 \leq \mathcal{X} \leq \mathcal{X}_2$  avec  $\mathcal{X}_1 \in C'_i$ ,  $\mathcal{X}_2 \in C'_i$ , on a aussi  $\mathcal{X} \in C'_i$ ; en effet,  $\mathcal{X}_1 \overline{\wedge} C^{(2)}$  n'est pas vide (c'est  $\mathcal{Q}_1$ ), donc  $\mathcal{X} \overline{\wedge} C$  n'est pas vide; posons  $\mathcal{X} \overline{\wedge} C = \mathcal{X}'$  qui est bien un idéal de  $C$ ; il lui correspond un idéal  $\mathcal{X}'$  de  $T$  par l'application précédente; montrons que  $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ ; il est évident que l'on a d'abord  $\mathcal{X}' \leq \mathcal{X}$ ; soit maintenant un élément  $x \in \mathcal{X}$ ; on a  $x \in \mathcal{X}_2$  et il existe  $a_2 \in \mathcal{Q}_2$  tel que  $x \leq a_2 \in C$ ; soit  $a_1$  un élément quelconque de  $\mathcal{Q}_1$ ; on a  $a_1 \in \mathcal{X}_1 \leq \mathcal{X}$  d'où  $a_1 \vee x \in \mathcal{X}$ ; le sous-treillis  $C$  étant convexe, de  $a_1 \leq a_1 \vee x \leq a_1 \vee a_2$ , on déduit  $a_1 \vee x \in C$ , d'où  $a_1 \vee x \in \mathcal{X}'$  et, par conséquent  $x \in \mathcal{X}'$ ; on a donc  $\mathcal{X}' \geq \mathcal{X}$  et finalement  $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ .

L'application  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$  étant manifestement isotone, elle réalise un isomorphisme de  $C_i$  et  $C'_i$ , sous-treillis convexe de  $T_i$ .

## 2. PASSAGE AUX PRODUITS CARDINAUX.

On sait que le produit cardinal de deux treillis semi-modulaires de longueur finie est semi-modulaire<sup>(1)</sup>. La propriété se généralise aux conditions étudiées par les théorèmes suivants.

a) Certaines conditions se conservent par passage au produit cardinal pour des treillis absolument quelconques.

**THÉOREME 2.** — *Si un treillis  $S$  et un treillis  $T$  satisfont à l'une des conditions suivantes (1), (2), (3), (5), (6), ( $\alpha$ ), ( $1_i$ ), ( $2_i$ ), ( $\alpha_i$ ), ( $1^i$ ), ( $2^i$ ), ( $\alpha^i$ ), le produit cardinal  $S \times T$  y satisfait aussi.*

1° *Condition (1)* : Soient deux éléments  $(p, q)$  et  $(u, v)$  du treillis  $S \times T$  tels que  $(p, q)$  et  $(u, v)$  couvrent  $(p \wedge u, q \wedge v)$ . On a donc  $p = p \wedge u$  et  $q$  couvre  $q \wedge v$  ou bien  $p$  couvre  $p \wedge u$  et  $q = q \wedge v$ ; de même, on a  $u = p \wedge u$  et  $v$  couvre  $q \wedge v$  ou  $u$  couvre  $p \wedge u$  et  $v = q \wedge v$ . Dans les quatre cas possibles, le fait que les treillis  $S$  et  $T$  satisfont à la condition (1) entraîne que  $(p \vee u, q \vee v)$  couvre  $(p, q)$  et  $(u, v)$ .

2° *Condition (2)* : Soient deux éléments  $(p, q)$  et  $(u, v)$  du treillis  $S \times T$  tels que  $(p, q)$  couvre  $(p \wedge u, q \wedge v)$ . On a  $p = p \wedge u$  et  $q$  couvre  $q \wedge v$  ou bien  $p$  couvre  $p \wedge u$  et  $q = q \wedge v$ . Dans le premier cas,  $(p \vee u, q \vee v) = (u, q \vee v)$  couvre  $(u, v)$  puisque le treillis  $T$  satisfait à la condition (2); dans le deuxième cas  $(p \vee u, q \vee v) = (p \vee u, v)$  couvre  $(u, v)$  puisque le treillis  $S$  satisfait à la condition (2).

3° *Condition (3)* : Soient quatre éléments  $(m, n)$  couvrant  $(p, q)$ ,  $(s, t)$  couvrant  $(u, v)$  du produit cardinal  $S \times T$ . On a  $m$  couvre  $p$  et  $n = q$  ou bien  $m = p$  et  $n$  couvre  $q$ , et, de la même façon,  $s$  couvre  $u$  et  $t = v$  ou

(2) Le symbole  $\overline{\wedge}$  désigne l'intersection au sens de la théorie des ensembles.

bien  $s = u$  et  $t$  couvre  $v$ . On a quatre cas à examiner; dans chacun d'eux, l'égalité de la condition (3) est satisfaite, compte tenu, soit du fait que la condition (3) est satisfaite dans le treillis  $S$  ou dans le treillis  $T$ , soit du fait que, dans un treillis quelconque, les relations  $x = y$  et  $z \geq t$  entraînent l'égalité  $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$ . (Le second membre est en effet  $x \vee t$  et on a  $[(x \vee t) \wedge z] \vee x \leq x \vee t$  et  $[(x \vee t) \wedge z] \vee x \geq t \vee x$ ).

4° *Condition (5)* : Soient trois éléments  $x = (m, n)$ ,  $y = (u, v)$ ,  $z = (p, q)$  du treillis  $S \times T$  tels que l'on ait  $y \wedge z < x < z < y \vee x$ . Les éléments  $x$  et  $z$  étant distincts, on ne peut avoir à la fois  $m = p$  et  $n = q$ . Supposons, par exemple, que nous ayons  $m \neq p$ . De  $u \wedge p \leq m < p \leq u \vee m$ , on déduit  $u \wedge p \neq m$  car de l'égalité  $u \wedge p = m$ , résulterait  $u \geq m$ , d'où  $u \vee m = u$ , et finalement  $u \geq p$  et  $u \wedge p = p$  en contradiction avec  $u \wedge p = m$ . De la même manière, on déduit  $u \vee m \neq p$ , si bien qu'on a  $u \wedge p < m < p < u \vee m$ . Le treillis  $S$  satisfait à la condition (5); ceci entraîne l'existence d'un élément  $s$  tel que  $u \wedge p < s \leq u$  et  $(m \vee s) \wedge p = m$ . Dans le treillis  $S \times T$ , l'élément  $t = (s, v \wedge q)$  vérifie  $y \wedge z < t \leq y$  et  $(x \vee t) \wedge z = x$ , ce qui montre que ce treillis satisfait à la condition (5).

5° *Condition (6)* : L'hypothèse est celle du 4°. Le raisonnement fait s'applique; ici, l'élément  $s$  vérifie  $u \wedge p < s \leq u$  et  $(m \vee s) \wedge p < p$ . Dans le produit cardinal  $S \times T$ , l'élément  $t = (s, v \wedge q)$  vérifie  $y \wedge z < t \leq y$  et  $(x \vee t) \wedge z < z$ , ce qui montre que ce treillis satisfait à la condition (6).

6° *Condition ( $\alpha$ )* : Soient deux éléments  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  du produit cardinal  $S \times T$ . Supposons que le couple  $(x, y)$  possède la propriété  $a$ , c'est-à-dire que, pour tout élément  $x' = (p', q')$  tel que  $x \wedge y \leq x' \leq x$ , on ait  $(x' \vee y) \wedge x = x'$ . Ceci entraîne que, pour tout élément  $p'$  tel que  $p \wedge u \leq p' \leq p$ , on a  $(p' \vee u) \wedge p = p'$  et, pour tout élément  $q'$  tel que  $q \wedge v \leq q' \leq q$ , on a  $(q' \vee v) \wedge q = q'$ ; autrement dit, dans les treillis  $S$  et  $T$ , les couples d'éléments  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possèdent la propriété  $a$ . Ces treillis satisfaisant à la condition ( $\alpha$ ), les couples d'éléments  $(u, p)$  et  $(v, q)$  possèdent aussi cette propriété : tout élément  $u'$  tel que  $u \wedge p \leq u' \leq u$  satisfait à  $(u' \vee p) \wedge u = u'$  et tout élément  $v'$  tel que  $v \wedge q \leq v' \leq v$  satisfait à  $(v' \vee q) \wedge v = v'$ . Il en résulte que tout élément  $y' = (u', v')$  de  $S \times T$  tel que  $x \wedge y \leq y' \leq y$  satisfait à  $(y' \vee x) \wedge y = y'$ . Le couple  $(y, x)$  possède donc la propriété  $a$  comme le couple  $(x, y)$  et le treillis  $S \times T$  satisfait à la condition ( $\alpha$ ).

7° *Conditions ( $1_i$ ), ( $2_i$ ), ( $\alpha_i$ )* : Leur conservation au produit cardinal résulte de la conservation des conditions (1), (2), ( $\alpha$ ) et du lemme suivant.

LEMME 2. — *Le treillis des idéaux  $(S \times T)_i$  du produit cardinal  $S \times T$  est isomorphe au produit cardinal  $S_i \times T_i$  des treillis d'idéaux de  $S$  et  $T$ .*

Soit  $\mathfrak{X}$  un idéal de  $S$ , élément de  $S_i$ ,  $\mathfrak{Y}$  un idéal de  $T$ , élément de  $T_i$ . L'ensemble des éléments  $(x, y)$  de  $S \times T$  où  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y \in \mathfrak{Y}$  est un idéal; désignons-le par  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ .

Considérons l'application  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  de  $S_i \times T_i$  dans  $(S \times T)_i$ . Cette application est évidemment biunivoque. Montrons que c'est une application sur. Si  $\mathcal{Z}$  est un idéal de  $S \times T$ , l'ensemble  $x$  des éléments  $x \in S$  tels qu'il existe  $y \in T$  avec  $(x, y) \in \mathcal{Z}$  est un idéal de  $S$  : en effet,  $x_1 \in \mathcal{X}$  et  $x_2 \leq x_1$  entraînent  $x_2 \in \mathcal{X}$  car il existe  $y_1 \in T$  tel que  $(x_1, y_1) \in \mathcal{Z}$  et  $(x_2, y_1) \in \mathcal{Z}$ ; d'autre part,  $x_1 \in \mathcal{X}$  et  $x_2 \in \mathcal{X}$  entraînent  $x_1 \vee x_2 \in \mathcal{X}$  car il existe  $y_1 \in T$ ,  $y_2 \in T$  tels que  $(x_1, y_1) \in \mathcal{Z}$ ,  $(x_2, y_2) \in \mathcal{Z}$ , d'où l'on déduit  $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in \mathcal{Z}$ . De même, l'ensemble  $\mathcal{Y}$  des éléments  $y \in T$  tels qu'il existe  $x \in S$  avec  $(x, y) \in \mathcal{Z}$  est un idéal de  $T$ . Enfin, on a  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  : tout élément de  $\mathcal{Z}$  appartient évidemment à  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ; réciproquement, si  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , il existe  $y' \in T$  et  $x' \in S$  tels que  $(x, y') \in \mathcal{Z}$  et  $(x', y) \in \mathcal{Z}$ , d'où il résulte  $(x \vee x', y \vee y') \in \mathcal{Z}$  et  $(x, y) \in \mathcal{Z}$ . L'application est isotone, c'est donc un isomorphisme de  $S_i \times T_i$  sur  $(S \times T)_i$ .

8° Conditions  $(1')$ ,  $(2')$ ,  $(\alpha')$  : Leur permanence au produit cardinal résulte de celle des conditions  $(1)$ ,  $(2)$ ,  $(\alpha)$  et du lemme dual du lemme 2.

Pour démontrer le théorème 3, nous ferons usage du lemme suivant.

LEMME 3. — Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments du produit cardinal  $S \times T$  de deux treillis  $S$  et  $T$ . Si une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$  est obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$ , si, dans le treillis  $S$ , le couple  $(p, u)$  possède la propriété  $b$  et si, dans le treillis  $T$ , le couple  $(q, v)$  possède la propriété  $b$ , la chaîne  $\{x_i \vee y\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \vee y$ .

Nous pouvons admettre que la chaîne  $\{x_i\}$  est sans répétition. Posons  $x_i = (p_i, q_i)$ ; on a  $x_i \vee y = (p_i \vee u, q_i \vee v)$ . Il faut montrer que la chaîne  $\{(p_i \vee u, q_i \vee v)\}$  est maximale entre  $(u, v)$  et  $(p \vee u, q \vee v)$ . Supposons que cette chaîne ne soit pas maximale : on peut y intercaler un élément  $(a', b')$ ; l'élément  $(a' \wedge p, b' \wedge q)$  appartient à la chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$ ; posons  $a' \wedge p = c$ ,  $b' \wedge q = d$ ,  $c \vee u = a$ ,  $d \vee v = b$ . On a  $(a', b') > (a, b)$  et il n'existe aucun élément de la chaîne  $\{(p_i \vee u, q_i \vee v)\}$  tel que  $(a', b') > (p_i \vee u, q_i \vee v) > (a, b)$ . On ne peut avoir simultanément  $a' = a$  et  $b' = b$ ; supposons qu'on ait par exemple  $a' > a$ . Introduisons parmi les éléments  $p_i$  la relation  $\mathcal{R}$  suivante :  $p_i \mathcal{R} p_{i'}$  si l'ensemble des éléments  $p_i$  compris entre  $p_{i'}$  et  $p_{i'}$  constitue une chaîne maximale entre ces deux éléments; cette relation est manifestement réflexive, symétrique et transitive; c'est une relation d'équivalence et elle réalise une partition de l'ensemble des éléments  $p_i$ . Ceci posé, ou bien  $c$  est un élément maximum d'une classe de cette partition, ou bien il n'en est pas ainsi. Examinons d'abord le premier cas. L'élément  $d$  est certainement le dernier élément de la forme  $q_i$  associé à  $c$  comme élément  $p_i$  (car, s'il en existait un autre soit  $f$ , tel que  $f > d$ , on aurait  $(c, f) > (c, d)$  et  $(c \vee u, f \vee v) > (a', b') > (c \vee u, d \vee v)$  et ceci contredit  $a' \neq a = c \vee u$ ). Nous devons distinguer deux sous-cas : 1° il existe un élément  $e$  n'appartenant pas à la chaîne  $\{p_i\}$  mais que l'on peut intercaler dans cette chaîne immédiatement au-dessus de  $c$ ; l'élément  $(e, d)$  peut

alors être intercalé dans la chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$  ce qui contredit le fait que cette chaîne est maximale; 2° il n'existe pas de tel élément; considérons alors une chaîne  $\{\bar{p}_a\}$  maximale entre  $p \wedge u$  et  $p$  et contenant tous les éléments  $p_i$ ; pour tout élément  $\bar{p}_a$  tel que  $\bar{p}_a > c$ , il existe un élément  $p_i$  tel que  $\bar{p}_a \geq p_i > c$  et on a  $\bar{p}_a \vee u \geq p_i \vee u > a' > a = c \vee u$ ; donc, l'élément  $a'$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{\bar{p}_a \vee u\}$  contrairement au fait que le couple  $(p, u)$  du treillis  $S$  possède la propriété  $b$ . Examinons maintenant le deuxième cas. Considérons une chaîne  $\{\bar{p}_a\}$  comme ci-dessus; ici encore, l'élément  $a'$  peut être intercalé dans la chaîne  $\{\bar{p}_a \vee u\}$  d'où la contradiction. La supposition faite n'est donc pas légitime et le lemme est démontré.

**THÉORÈME 3.** — *Si un treillis  $S$  et un treillis  $T$  satisfont la condition  $(\gamma)$ ,  $(\gamma)$ , il en est de même du treillis  $S \times T$ .*

Soient  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ . Supposons que le couple  $(y, x)$  possède la propriété  $c$ . On sait que cette propriété équivaut aux propriétés  $a$  et  $b$ . Le couple  $(y, x)$  possédant la propriété  $a$  dans  $S \times T$ , le couple  $(u, p)$  la possède dans  $S$  et le couple  $(v, q)$  la possède dans  $T$  (voir 6° dans la démonstration du théorème 2). Le couple  $(y, x)$  possédant la propriété  $b$ , il en est de même des couples  $(u, p)$  et  $(v, q)$  : si  $\{u_i\}$  est une chaîne maximale dans  $S$  entre  $u \wedge p$  et  $u$ ,  $\{v_a\}$  une chaîne maximale dans  $T$  entre  $v \wedge q$  et  $v$ , la chaîne  $\{(u_i, v \wedge q) \leq (u, v_a)\}$  est maximale dans  $S \times T$  entre  $(u \wedge p, v \wedge q)$  et  $(u, v)$ , donc la chaîne  $\{(u_i \vee p, q) \leq (u \vee p, v_a \vee q)\}$  est maximale dans  $S \times T$  entre  $(p, q)$  et  $(u \vee p, v \vee q)$  ce qui montre que la chaîne  $\{u_i \vee p\}$  est maximale dans  $S$  entre  $p$  et  $u \vee p$  et la chaîne  $\{v_a \vee q\}$  maximale dans  $T$  entre  $q$  et  $v \vee q$ . Le couple  $(u, p)$  vérifie dans  $S$  les propriétés  $a$  et  $b$ , donc la propriété  $c$  et il en est de même du couple  $(p, u)$  puisque  $S$  satisfait à la condition  $(\gamma)$ . De même, le couple  $(v, q)$  vérifiant la propriété  $c$  dans  $T$  qui satisfait à la condition  $(\gamma)$ , le couple  $(q, v)$  vérifie aussi cette propriété. Il résulte d'abord de là que le couple  $(x, y)$  possède la propriété  $a$  puisqu'il en est ainsi des couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  (voir encore 6° dans la démonstration du théorème 2). Ceci a pour conséquence que toute chaîne maximale  $\{x_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x$  peut être obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$  ( $T$ , chapitre I, théorème 1). Les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possédant la propriété  $b$ , le lemme 3 s'applique et montre que le couple  $(x, y)$  possède aussi la propriété  $b$ . Finalement, le couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $c$  et la condition  $(\gamma)$  est valable dans  $S \times T$ .

*b)* D'autres conditions se conservent par passage au produit cardinal pour des treillis conditionnellement complets.

THÉOREME 4. — Si un treillis  $S$  et un treillis  $T$  conditionnellement complets satisfont à l'une des conditions (L), (R), (I), le treillis  $S \times T$  y satisfait.

1° Condition (L) : Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ . Les couples d'éléments  $(p, u)$  de  $S$ ,  $(q, v)$  de  $T$  étant supposés posséder la propriété  $l$ , nous montrons que le couple  $[(p, q), (u, v)]$  de  $S \times T$  la possède également. Supposons qu'il existe une chaîne  $\{x_i\}$  maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$ . Nous devons montrer que la chaîne  $\{y_i\}$  est maximale entre  $y$  et  $x \vee y$ . Posons  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ . On a  $p_i = u_i \wedge p$ ,  $q_i = v_i \wedge q$ . Les treillis  $S$  et  $T$  étant conditionnellement complets, il résulte du lemme 3 de T, chapitre II, que la chaîne  $\{p_i\}$  est maximale entre  $p \wedge u$  et  $p$  dans  $S$  et que la chaîne  $\{q_i\}$  est maximale entre  $q \wedge v$  et  $q$  dans  $T$ . De plus, la chaîne  $\{p_i\}$  est obtenue sous la forme  $p_i = u_i \wedge p$  à partir de la chaîne  $\{u_i\}$  entre  $u$  et  $p \vee u$ , la chaîne  $\{q_i\}$  est obtenue sous la forme  $q_i = v_i \wedge q$  à partir de la chaîne  $\{v_i\}$  entre  $v$  et  $q \vee v$ . Les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possédant la propriété  $l$ , il en résulte que la chaîne  $\{(u_i, v_i)\}$  est maximale entre  $(u, v)$  et  $(p \vee u, q \vee v)$ . En effet, admettons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'on puisse intercaler dans cette chaîne un élément, soit  $(a', b')$ . L'élément  $(a' \wedge p, b' \wedge q)$  appartient à la chaîne maximale  $\{(u_i \wedge p, v_i \wedge q)\}$ , c'est-à-dire à la chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$ . Posons  $a' \wedge p = c$ ,  $b' \wedge q = d$ . Il existe un élément de la chaîne  $\{(u_i, v_i)\}$  soit  $(a, b)$  tel que  $a \wedge p = c$ ,  $b \wedge q = d$ . On a  $(a', b) \neq (a, b)$ . On ne peut avoir à la fois  $a' = a$ ,  $b' = b$ . Supposons qu'on ait par exemple,  $a' \neq a$ . L'élément  $a'$  appartient à la chaîne  $\{u_i\}$  ou peut y être intercalé et l'élément  $a$  appartient à cette chaîne. Ces éléments sont tels que  $a \wedge p = a' \wedge p$  ce qui contredit le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne  $\{p_i\}$  par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaîne  $\{u_i\}$  de façon correspondante ne peut être obtenue qu'à partir d'une chaîne maximale.

Il en résulte immédiatement que le treillis  $S \times T$  satisfait à la condition (L) s'il en est ainsi des treillis  $S$  et  $T$ .

2° Condition (R) : La démonstration est analogue. Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ , les couples d'éléments  $(p, u)$  de  $S$ ,  $(q, v)$  de  $T$  possédant la propriété  $r$ . Soit  $\{z_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  obtenue sous la forme  $z_i = x_i \wedge y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ . Posons  $z_i = (s_i, t_i)$ ,  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ . On a  $s_i = p_i \wedge u_i$ ,  $t_i = q_i \wedge v_i$ . Les treillis  $S$  et  $T$  étant conditionnellement complets, il résulte du lemme 3 de T, chapitre II, que la chaîne  $\{s_i\}$  est maximale entre  $p \wedge u$  et  $p \vee u$  dans  $S$  et que la chaîne  $\{t_i\}$  est maximale entre  $q \wedge v$  et  $q \vee v$  dans  $T$ . De plus, la chaîne  $\{s_i\}$  est obtenue sous la forme  $s_i = p_i \wedge u_i$  à partir de la chaîne

$\{(p_i, u_i)\}$  du produit cardinal  $[p, p \vee u] \times [u, p \vee u]$ , la chaîne  $\{t_i\}$  est obtenue sous la forme  $t_i = q_i \wedge v_i$  à partir de la chaîne  $\{(q_i, v_i)\}$  du produit cardinal  $[q, q \vee v] \times [v, q \vee v]$ . Les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possédant la propriété  $r$ , il en résulte que la chaîne  $\{(x_i, y_i) = [(p_i, q_i), (u_i, v_i)]\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ . En effet, supposons qu'on puisse intercaler un élément  $(x', y') = [(a', b'), (e', f')]$  dans cette chaîne. L'élément  $x' \wedge y' = (a' \wedge e', b' \wedge f')$  appartient à la chaîne maximale  $\{z_i = (s_i, t_i)\}$ . Posons  $a' \wedge e' = c$ ,  $b' \wedge f' = d$ . Il existe un élément de la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  soit  $[(a, b), (e, f)]$  tel que  $(a, b) \wedge (e, f) = (c, d)$  soit  $a \wedge e = c$ ,  $b \wedge f = d$ . On a  $[(a', b'), (e', f')] \neq [(a, b), (e, f)]$ . On ne peut avoir à la fois  $(a', e') = (a, e)$  et  $(b', f') = (b, f)$ . Supposons qu'on ait, par exemple,  $(a', e') \neq (a, e)$ . L'élément  $(a', e')$  appartient à la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  ou peut y être intercalé et l'élément  $(a, e)$  appartient à cette chaîne. Ces éléments étant tels que  $a' \wedge e' = a \wedge e$ , ceci contredit le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne  $\{s_i\}$  par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  de façon correspondante peut être obtenue seulement à partir d'une chaîne maximale.

Il en résulte que le treillis  $S \times T$  satisfait à la condition (R) s'il en est ainsi des treillis  $S$  et  $T$ .

3° *Condition (I)* : La démonstration est encore analogue. Soient deux éléments de  $S \times T$ ,  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$ , les couples d'éléments  $(p, u)$  de  $S$  et  $(q, v)$  de  $T$  vérifiant la propriété  $i$ . Soit  $\{(x_i, y_i)\}$  une chaîne maximale du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  obtenue sous la forme  $x_i = z_i \wedge x$ ,  $y_i = z_i \wedge y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . Posons  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ ,  $z_i = (s_i, t_i)$ . On a  $p_i = s_i \wedge p$ ,  $q_i = t_i \wedge q$ ,  $u_i = s_i \wedge u$ ,  $v_i = t_i \wedge v$ . Le lemme 3 de T, chapitre II, montre que la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$  et que la chaîne  $\{(q_i, v_i)\}$  est maximale dans le produit cardinal  $[q \wedge v, q] \times [q \wedge v, v]$ . De plus, la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  est obtenue sous la forme  $p_i = s_i \wedge p$ ,  $u_i = s_i \wedge u$  à partir de la chaîne  $\{s_i\}$  entre  $p \wedge u$  et  $p \vee u$ , la chaîne  $\{(q_i, v_i)\}$  est obtenue sous la forme  $q_i = t_i \wedge q$ ,  $v_i = t_i \wedge v$  à partir de la chaîne  $\{t_i\}$  entre  $q \wedge v$  et  $q \vee v$ . Du fait que les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possèdent la propriété  $i$ , nous déduisons que la chaîne  $\{z_i = (s_i, t_i)\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'on puisse y intercaler un élément, soit  $(a', b')$ . L'élément  $[(a' \wedge p, b' \wedge q), (a' \wedge u, b' \wedge v)]$  appartient à la chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$ . Posons  $a' \wedge p = c$ ,  $b' \wedge q = d$ ,  $a' \wedge u = g$ ,  $b' \wedge v = h$ . Il existe un élément de la chaîne  $\{z_i\}$  soit  $(a, b)$  tel que  $a \wedge p = c$ ,  $b \wedge q = d$ ,  $a \wedge u = g$ ,  $b \wedge v = h$ . On a  $(a', b') \neq (a, b)$ . On ne peut avoir  $a' = a$  et  $b' = b$ . Supposons, par exemple, qu'on ait  $a' \neq a$ . L'élément  $a'$  appartient à la chaîne  $\{a_i\}$  ou peut y être intercalé et l'élément  $a$  appartient à cette chaîne. Ces éléments sont tels que  $a' \wedge p = a \wedge p$ ,

$a' \wedge u = a \wedge u$  et ceci est en contradiction avec le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaîne  $\{s_i\}$  de façon correspondante peut être obtenue seulement à partir d'une chaîne maximale.

Donc, le treillis  $S \times T$  satisfait à la condition (I) si les treillis  $S$  et  $T$  y satisfont.

Un contre-exemple montre que les conditions (L), (R), (I) ne se conservent pas au produit cardinal si les treillis  $S$  et  $T$  ne sont pas tous deux conditionnellement complets. On peut même prendre pour  $S$  un treillis semi-modulaire de longueur finie et pour  $T$  une chaîne non complète :  $S$

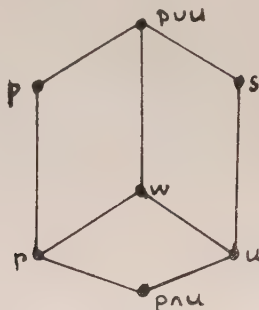


FIG. 16

est représentée par le diagramme ci-contre et  $T$  est la chaîne des nombres rationnels  $t$  tels que  $0 \leq t \leq 1$ . Prenons, dans  $S \times T$ ,  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  avec  $p$  et  $u$  comme indiqué sur le diagramme,  $q = 1$  et  $v = 0$ . Le couple  $(x, y)$  ne possède pas la propriété  $l$  : la chaîne formée par la juxtaposition des deux chaînes  $\{(p \wedge u, t)\}$  avec  $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\{(p, t)\}$  avec  $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$  est maximale entre  $(p \wedge u, 0)$  et  $(p, 1)$ ; elle est obtenue à partir de la chaîne formée par la juxtaposition des chaînes  $\{(s, t)\}$  avec  $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\{(p \vee u, t)\}$  avec  $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; cette chaîne n'est pas maximale entre  $(u, 0)$  et  $(p \vee u, 1)$  puisqu'on peut y intercaler l'élément  $(u, 0)$ .

**THÉORÈME 5.** — *Si un treillis  $S$  et un treillis  $T$  conditionnellement complets satisfont à l'une des conditions (M), (S), (J),  $(J_1)$ , le treillis  $S \times T$  y satisfait.*

1° *Condition (M) :* Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ . Admettons que les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possèdent la propriété  $m$  et montrons qu'il en est de même du couple  $(x, y)$ . Soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$  obtenue sous la forme  $x_i = y_i \wedge x$  à

partir d'une chaîne  $\{y_i\}$  entre  $y$  et  $x \vee y$ . Nous devons établir que la chaîne  $\{y_i\}$  peut être choisie maximale entre  $y$  et  $x \vee y$ . Posons  $x = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ . Le lemme 3 de T, chapitre II, montre que les chaînes  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$  sont maximales respectivement entre  $p \wedge u$  et  $p$  et entre  $q \wedge v$  et  $q$ . D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes respectives  $\{u_i\}$  et  $\{v_i\}$ . Envisageons les chaînes maximales  $\{\overline{p_\alpha}\}$  et  $\{\overline{q_\beta}\}$  déduites des chaînes  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$  respectivement, par suppression des répétitions. Ses chaînes sont également obtenues à partir de chaînes déduites facilement de  $\{u_i\}$  et  $\{v_i\}$ . On peut donc les obtenir à partir de chaînes  $\{\overline{u_\alpha}\}$  et  $\{\overline{v_\beta}\}$  maximales respectivement entre  $u$  et  $p \vee u$  et entre  $v$  et  $q \vee v$ . Ceci posé, nous choisirons les éléments  $y_i = (u_i, v_i)$  de la manière suivante :  $u_i = \overline{u_\alpha}$  si  $p_i = \overline{p_\alpha}$ ,  $v_i = \overline{v_\beta}$  si  $q_i = \overline{q_\beta}$ . Je dis que la chaîne  $\{y_i\}$  ainsi choisie est maximale entre  $y$  et  $x \vee y$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit  $y' = (a', b')$  un élément qu'on puisse y intercaler. L'élément  $y' \wedge x = (a' \wedge p, b' \wedge q)$  appartient à la chaîne  $\{x_i\}$ . Il existe donc un élément de la chaîne  $\{y_i\}$  choisie ci-dessus, soit  $(a, b)$ , tel qu'on ait  $a' \wedge p = a \wedge p$ ,  $b' \wedge q = b \wedge q$ . On a  $(a' b') \neq (a, b)$ . On a donc nécessairement au moins une des deux inégalités :  $a' \neq a$ ,  $b' \neq b$ . Supposons, par exemple, qu'on ait la première. L'élément  $a'$  n'appartient pas à la chaîne  $\{\overline{u_\alpha}\}$  puisque  $a$  en fait partie et que l'on a  $a' \wedge p = a \wedge p$ . Il peut donc être intercalé dans cette chaîne ce qui contredit sa maximalité.

La condition (M) se conserve donc bien à  $S \times T$ .

2° Condition (S) : Considérons deux éléments  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  de  $S \times T$  tels que les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  vérifient la propriété  $s$ . Soit  $\{z_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  obtenue sous la forme  $z_i = x_i \wedge y_i$  à partir d'une chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ . Pour établir que le couple  $(x, y)$  vérifie la propriété  $s$ , nous montrons que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  peut être choisie maximale. Posons  $z_i = (s_i, t_i)$ ,  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ . D'après le lemme 3 de T, chapitre II, les chaînes  $\{s_i\}$  et  $\{t_i\}$  sont maximales respectivement entre  $p \wedge u$  et  $p \vee u$  et entre  $q \wedge v$  et  $q \vee v$ . D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes  $\{(p_i, u_i)\}$  et  $\{(q_i, v_i)\}$ . Envisageons les chaînes maximales  $\{\overline{s_\alpha}\}$  et  $\{\overline{t_\beta}\}$  déduites des chaînes  $\{s_i\}$  et  $\{t_i\}$  par suppression des répétitions. Ces chaînes sont également obtenues à partir de chaînes facilement déduites de  $\{(p_i, u_i)\}$  et  $\{(q_i, v_i)\}$ . On peut donc les obtenir à partir de chaînes  $\{\overline{p_\alpha}, \overline{u_\alpha}\}$  et  $\{\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta}\}$  maximales respectivement dans le produit cardinal  $[p, p \vee u] \times [u, p \vee u]$  et dans le produit cardinal  $[q, q \vee v] \times [v, q \vee v]$ . Ceci posé, nous choisirons les éléments  $(x_i, y_i) = [(p_i, q_i), (u_i, v_i)]$  de la manière suivante :  $(p_i, u_i) = (\overline{p_\alpha}, \overline{u_\alpha})$  si  $s_i = \overline{s_\alpha}$  et  $(q_i, v_i) = (\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})$  si  $t_i = \overline{t_\beta}$ . Je dis que la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  ainsi choisie est maximale dans le produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ . S'il n'en était pas ainsi, on pour-

rait  $y$  intercaler un élément  $(x', y') = [a', b'], (e', f')]$ . L'élément  $x' \wedge y' = (a' \wedge e', b' \wedge f')$  appartiendrait à la chaîne  $\{z_i\}$ . Il existerait donc un élément de la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$  choisie ci-dessus, soit  $[(a, b), (e, f)]$  tel qu'on ait  $a' \wedge e' = a \wedge e$ ,  $b' \wedge f' = b \wedge f$ . On aurait  $[(a', b'), (e', f')] \neq [(a, b), (e, f)]$  donc nécessairement aussi une au moins des inégalités  $(a', e') \neq (a, e)$ ,  $(b', f') \neq (b, f)$ . Dans le premier cas, par exemple, l'élément  $(a', e')$  pourrait être intercalé dans la chaîne  $\{(\overline{p_a}, \overline{u_a})\}$  en contradiction avec le fait que cette chaîne est maximale.

La condition (S) se conserve par passage à  $S \times T$ .

3° *Condition (J)* : Soient deux éléments  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  de  $S \times T$  tels que les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possèdent la propriété  $j$ . Soit  $\{(x_i, y_i)\}$  une chaîne maximale du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  obtenue sous la forme  $x_i = z_i \wedge x$ ,  $y_i = z_i \wedge y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . Nous montrons que le couple  $(x, y)$  possède la propriété  $j$  et pour cela que la chaîne  $\{z_i\}$  peut être choisie maximale. Posons  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$ ,  $z_i = (s_i, t_i)$ . D'après le lemme 3 de T, chapitre II, les chaînes  $\{(p_i, u_i)\}$  et  $\{(q_i, v_i)\}$  sont maximales respectivement dans le produit cardinal  $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$  et dans le produit cardinal  $[q \wedge v, q] \times [q \wedge v, v]$ . D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes  $\{s_i\}$  et  $\{t_i\}$ . Envisageons les chaînes maximales  $\{(\overline{p_a}, \overline{u_a})\}$  et  $\{(\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})\}$  déduites des chaînes  $\{(p_i, u_i)\}$  et  $\{(q_i, v_i)\}$  par suppression des répétitions. Ces chaînes sont également obtenues à partir de chaînes déduites facilement des chaînes  $\{s_i\}$  et  $\{t_i\}$ . On peut donc les obtenir à partir de chaînes  $\{\overline{s_a}\}$  et  $\{\overline{t_\beta}\}$  maximales respectivement entre  $p \wedge u$  et  $p \vee u$  et entre  $q \wedge v$  et  $q \vee v$ . Ceci posé, nous choisirons les éléments  $z_i = (s_i, t_i)$  de la manière suivante :  $s_i = \overline{s_a}$  si  $(p_i, u_i) = (\overline{p_a}, \overline{u_a})$ ,  $t_i = \overline{t_\beta}$  si  $(q_i, v_i) = (\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})$ . Je dis que la chaîne  $\{z_i\}$  ainsi choisie est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . S'il n'en était pas ainsi, on pourrait  $y$  intercaler un élément  $z' = (s', t')$ . L'élément

$$(z' \wedge x, z' \wedge y) = [(s' \wedge p, t' \wedge q), (s' \wedge u, t' \wedge v)]$$

appartiendrait à la chaîne  $\{(x_i, y_i)\}$ . Il existerait donc un élément de la chaîne  $\{z_i\}$  choisie ci-dessus soit  $(s, t)$  tel qu'on ait  $s' \wedge p = s \wedge p$ ,  $t' \wedge q = t \wedge q$ ,  $s' \wedge u = s \wedge u$ ,  $t' \wedge v = t \wedge v$ . On aurait  $(s', t') \neq (s, t)$ , donc nécessairement aussi l'une au moins des inégalités  $s' \neq s$ ,  $t' \neq t$ . Dans le premier cas, par exemple, l'élément  $s'$  pourrait être intercalé dans la chaîne  $\{\overline{s_a}\}$  en contradiction avec le fait que cette chaîne est maximale.

La condition (J) se conserve par passage à  $S \times T$ .

4° *Condition (J<sub>1</sub>)* : Soient deux éléments  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  de  $S \times T$ , les treillis  $S$  et  $T$  satisfaisant à la condition (J<sub>1</sub>). Soit  $\{(x_i, y_i)\}$  une chaîne maximale du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  telle que l'on ait  $x_i = (x_i \vee y_i) \wedge x$ ,  $y_i = (x_i \vee y_i) \wedge y$  pour tout  $i$ . Nous devons

montrer que la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, posons  $x_i = (p_i, q_i)$ ,  $y_i = (u_i, v_i)$  et soit  $a = (b, c)$  un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$ . L'élément  $(a \wedge x, a \wedge y)$  appartient à la chaîne maximale  $\{x_i, y_i\}$ . Il existe donc un des indices  $i$  soit  $\alpha$  tel que l'on ait  $a \wedge x = x_\alpha$ ,  $a \wedge y = y_\alpha$ . On a certainement  $a \neq x_\alpha \vee y_\alpha$ , donc au moins une des deux inégalités  $b \neq p_\alpha \vee u_\alpha$ ,  $c \neq q_\alpha \vee v_\alpha$ . Si on a par exemple  $b \neq p_\alpha \vee u_\alpha$ , ceci contredit le fait que le treillis  $S$  satisfait à la condition  $(J_1)$  car, dans ces conditions, la chaîne  $\{(p_i, u_i)\}$  maximale dans le produit cardinal  $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$  (puisque les treillis  $S$  et  $T$  sont conditionnellement complets), telle que l'on ait  $p_i = (p_i \vee u_i) \wedge p$ ,  $u_i = (p_i \vee u_i) \wedge u$  pour tout  $i$ , n'est pas telle que la chaîne  $\{p_i \vee u_i\}$  soit maximale entre  $p \wedge u$  et  $p \vee u$  (puisque l'on peut intercaler dans cette chaîne l'élément  $b$ ).

La condition  $(J_1)$  se conserve donc par passage à  $S \times T$ .

Des contre-exemples montrent que les conditions  $(M)$ ,  $(S)$ ,  $(J)$  ne se conservent pas au produit cardinal  $S \times T$  si les treillis  $S$  et  $T$  ne sont pas tous deux conditionnellement complets.

1° Prenons pour  $S$  le treillis représenté par le diagramme ci-contre. Il est complet et satisfait à la condition de chaîne ascendante; on s'assure

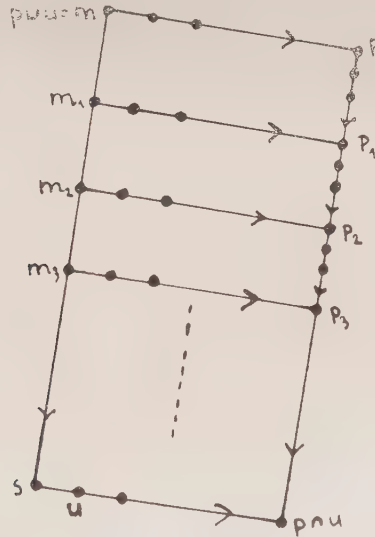


FIG. 17

sans peine qu'il satisfait à la condition  $(M)$ . Prenons pour  $T$  la chaîne des nombres rationnels  $t$  tels que  $0 \leq t \leq 1$ . Choisissons, dans  $S \times T$ ,  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  avec  $p$  et  $u$  comme indiqué sur le diagramme,  $q = 1$  et  $v = 0$ . Le couple  $(x, y)$  ne possède pas la propriété  $m$  : la chaîne constituée par l'élément  $(p \wedge u, 0)$  et par la juxtaposition des chaînes telles que  $\{(p_n, t)\}$

où  $t$  satisfait à  $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < t < \frac{1}{\sqrt{2n}}$  et de la chaîne  $\{(p, t)\}$  où  $t$  satisfait à  $\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leq 1$  est maximale entre  $(p \wedge u, 0)$  et  $(p, 1)$ ; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément  $(u, 0)$  et par la juxtaposition des chaînes telles que  $\{(m_n, t)\}$  où  $t$  satisfait à  $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < t < \frac{1}{\sqrt{2n}}$  et de la chaîne  $\{(m, t)\}$  où  $t$  satisfait à  $\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leq 1$ ; cette dernière chaîne n'est pas maximale entre  $(u, 0)$  et  $(p \vee u, 1)$  car on peut y intercaler l'élément  $(s, 0)$  et on ne peut pas la remplacer par une chaîne maximale assurant l'obtention.

2° Le contre-exemple précédent montre aussi que la condition (S) ne se conserve pas par passage au produit cardinal si  $T$  n'est pas conditionnellement complet :  $S$  satisfait en effet à cette condition à laquelle ne satisfait évidemment pas  $S \times T$ .

Nous donnerons néanmoins un autre contre-exemple où  $S$  est de longueur finie,  $T$  restant la chaîne des nombres rationnels tels que  $0 \leq t \leq 1$ . Nous prendrons pour  $S$  le treillis de la note 2 du chapitre III de  $T$ . Nous choisirons, dans  $S \times T$ , les éléments  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  où  $p = c$  et  $u = g$ ,  $q = 1$  et  $v = 0$ . Le couple  $(x, y)$  ne vérifie pas la propriété  $s$  : la chaîne constituée par l'élément  $(e, 0)$  et les chaînes  $\{(d, t)\}$  où on a  $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\{(a, t)\}$  où on a  $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$  est maximale entre  $(e, 0)$  et  $(a, 1)$ ; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément  $[(c, 1), (g, 0)]$  et les chaînes  $\{[(b, 1), (f, t)]\}$  où on a  $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\{[(a, 1), (a, t)]\}$  où on a  $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; cette chaîne n'est pas maximale dans le produit cardinal  $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$  et ne peut être remplacée par une chaîne maximale assurant l'obtention.

3° Le contre-exemple suivant montre que les conditions (J) et  $(J_1)$  ne se conservent pas au produit cardinal si  $T$  n'est pas conditionnellement complet. Prenons pour  $S$  le treillis  $B_4$  ( $T$ , chapitre II) et pour  $T$  encore la chaîne des nombres rationnels  $t$  tels que  $0 \leq t \leq 1$ . Prenons, dans  $S \times T$ ,  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  avec  $p = a_1$ ,  $u = c_1$ ,  $q = 1$ ,  $v = 0$ . Le couple  $(x, y)$  ne possède pas la propriété  $j$  : la chaîne constituée par l'élément  $[(d, 0), (d, 0)]$  et la juxtaposition des chaînes  $\{[(a_n, t), (c_n, 0)]\}$  où  $t$  varie de  $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$  à  $\frac{1}{\sqrt{2n}}$  (sauf pour  $n = 1$ , auquel cas  $t$  varie de  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  à 1) est maximale dans le produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ ; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément  $(d, 0)$  et la juxtaposition

des chaînes  $\{(b_n, t)\}$  où  $t$  varie de  $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$  à  $\frac{1}{\sqrt{2n}}$  (sauf si  $n=1$ , cas où  $t$  varie de  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  à 1); cette chaîne n'est pas maximale car on peut y intercaler l'élément  $(b, 0)$  et elle ne peut être remplacée par une chaîne maximale assurant l'obtention.

c) Les conditions restantes (F), (B), ( $\beta$ ) se conservent à  $S \times T$  si  $S$  et  $T$  satisfont à la condition de chaîne descendante. C'est trivial pour les conditions (F) et (B) puisqu'elles sont alors équivalentes à la condition (2). Pour la condition ( $\beta$ ), cela résulte du lemme suivant.

LEMME 4. — Soient  $S$  et  $T$  deux treillis conditionnellement complets et  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ . Supposons que les couples d'éléments  $(p, u)$  et  $(q, v)$  de  $T$  possèdent la propriété  $b$ . Supposons également que l'un des treillis  $S$  et  $T$  au moins satisfasse à la condition de chaîne descendante. Alors, le couple d'éléments  $(x, y)$  de  $S \times T$  possède la propriété  $b$ .

Soit  $\{x_i\}$  une chaîne maximale entre  $x \wedge y$  et  $x$ . Posons  $x_i = (p_i, q_i)$ . Les treillis  $S$  et  $T$  étant conditionnellement complets, les chaînes  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$  sont maximales respectivement entre  $p \wedge u$  et  $p$  et entre  $q \wedge v$  et  $q$ . Les couples  $(p, u)$  et  $(q, v)$  possédant la propriété  $b$ , les chaînes  $\{p_i \vee u\}$  et  $\{q_i \vee v\}$  sont maximales respectivement entre  $u$  et  $p \vee u$  et entre  $v$  et  $q \vee v$ . Supposons que la chaîne  $\{(p_i \vee u, q_i \vee v)\}$  ne soit pas maximale entre  $(u, v)$  et  $(p \vee u, q \vee v)$ . On peut donc y intercaler un élément, soit  $(u', v')$ . Les chaînes  $\{p_i \vee u\}$  et  $\{q_i \vee v\}$  étant maximales,  $u'$  et  $v'$  en font respectivement partie. Soit  $I_1$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $(p_i \vee u, q_i \vee v) < (u', v')$  et  $I_2$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $(p_i \vee u, q_i \vee v) > (u', v')$ . Il existe  $i \in I_1$  tel que  $p_i \vee u = u'$  et  $i \in I_2$  tel que  $q_i \vee v = v'$  (ou les mêmes égalités,  $I_1$  et  $I_2$  étant permutés; ce cas se traiterait de la même manière). Le treillis  $S \times T$  est lui aussi conditionnellement complet et l'élément  $\bigvee_{i \in I_1} (p_i, q_i) = (p_1, q_1)$  existe. La chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$  étant maximale,  $(p_1, q_1)$

en fait partie et  $(p_1 \vee u, q_1 \vee v)$  fait partie de la chaîne  $\{(p_i \vee u, q_i \vee v)\}$ . On a  $\bigvee_{i \in I_1} (p_i \vee u, q_i \vee v) = (p_1 \vee u, q_1 \vee v)$ , d'où  $(p_1 \vee u, q_1 \vee v) < (u', v')$

et  $p_1 \vee u = u'$ ,  $q_1 \vee v < v'$ . Si  $T$  satisfait à la condition de chaîne descendante, il existe un élément minimum  $q_2$  tel que  $q_i = q_2$  avec  $i \in I_2$ . On doit avoir  $q_2 \vee v = v'$ . Ceci est impossible car l'élément  $(p_1, q_2)$  pourrait être intercalé dans la chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$  (il ne peut pas en faire partie puisque  $p_1 \vee u = u'$ ,  $q_2 \vee v = v'$ ). Si  $S$  satisfait à la condition de chaîne descendante, il existe un élément minimum  $p_2$  tel que  $p_i = p_2$  avec  $i \in I_2$ . L'élément  $(p_2, q_1)$  peut être alors intercalé dans la chaîne  $\{(p_i, q_i)\}$  (il ne peut lui appartenir puisque  $p_2 \vee u > u'$  et  $q_1 \vee v < v'$ ), ce qui est impossible. On aboutit donc de toutes façons à une contradiction et le lemme est établi.

**THÉORÈME 6.** — *Si deux treillis  $S$  et  $T$  satisfont à la condition de chaîne descendante et à la condition  $(\beta)$ , il en est de même de leur produit cardinal  $S \times T$ .*

Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$  tels que le couple  $(x, y)$  possède la propriété  $b$ . Les couples  $(p, u)$  de  $S$  et  $(q, v)$  de  $T$  possèdent aussi la propriété  $b$  comme on l'a déjà montré. Les treillis  $S$  et  $T$  satisfaisant à la condition  $(\beta)$ , les couples  $(u, p)$  et  $(v, q)$  possèdent aussi la propriété  $b$ . Le lemme 4 montre alors que le couple  $(y, x)$  possède la propriété  $b$ . Le treillis  $S \times T$  satisfait donc à la condition  $(\beta)$ .

Un contre-exemple montre que, même pour des treillis  $S$  et  $T$  satisfaisant tous deux à la condition de chaîne ascendante, les conditions (F), (B),  $(\beta)$  ne conservent pas au produit cardinal. Prenons pour  $S$  le treillis représenté par le diagramme ci-contre et pour  $T$  le treillis obtenu à partir du treillis B4,



FIG. 18

( $T$ , chapitre II, § 4), en supprimant l'élément  $b$ . Les treillis  $S$  et  $T$  satisfont à toutes les conditions étudiées. Le produit cardinal  $S \times T$  ne satisfait pourtant pas à  $(\beta)$ , ni donc à (B), ni à (F). Prenons les éléments  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  de  $S \times T$  avec  $p$  et  $u$  comme indiqué sur le diagramme et  $q = a_1$ ,  $v = c_1$ . Le couple  $(x, y)$  ne possède pas la propriété  $b$  : la chaîne  $\{(u, d) < \dots < (p_n, a_n) < (p_{n-1}, a_n) < \dots < (p, a_1)\}$  est maximale entre  $(u, d)$  et  $(p, a_1)$  alors que la chaîne  $\{(u, c_1) < \dots \leq (p_n, b_1) < (p_{n-1}, b_1) \leq \dots < (p, b_1)\}$  n'est pas maximale entre  $(u, c_1)$  et  $(p, b_1)$  puisqu'on peut y intercaler l'élément  $(u, b_1)$ . Le couple  $(y, x)$  possède la propriété  $b$  car, puisque  $u \wedge p = u$ , ceci équivaut à dire que le couple  $(v, q)$  possède cette propriété.

La condition  $(\beta)$  est donc en défaut.

*d)* Signalons que la réciproque de la question envisagée ci-dessus est vraie en toute généralité : si le produit cardinal de deux treillis  $S$  et  $T$  satisfait à une des conditions étudiées, les treillis  $S$  et  $T$  y satisfont. Il est facile de le vérifier pour chacune des conditions.

*e)* Notons encore quelques résultats.

**THÉOREME 7.** — *Si  $S$  est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante et  $T$  un treillis conditionnellement complet quelconque et si ces treillis satisfont à la condition (B), il en est de même de leur produit cardinal.*

Ceci résulte immédiatement du lemme 4.

**THÉOREME 8.** — *Si  $S$  est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante et  $T$  un treillis conditionnellement complet quelconque et si ces treillis satisfont à la condition (F), il en est de même de leur produit cardinal.*

C'est une conséquence du lemme suivant, analogue au lemme 4.

**LEMME 5.** — *Soient  $S$  et  $T$  deux treillis conditionnellement complets et  $x = (p, q)$ ,  $y = (u, v)$  deux éléments de  $S \times T$ . Supposons que les couples d'éléments  $(p, u)$  de  $S$  et  $(q, v)$  de  $T$  possèdent la propriété  $f$ . Supposons également que l'un des treillis  $S$  et  $T$  au moins satisfasse à la condition de chaîne descendante. Alors, le couple d'éléments  $(x, y)$  de  $S \times T$  possède la propriété  $f$ .*

La démonstration du lemme 5 est analogue à celle du lemme 4.

On a pu remarquer que, dans les contre-exemples relatifs au théorème 5, on a utilisé un treillis de longueur finie et une chaîne seulement à propos de la condition (S). En fait, on n'aurait pas pu faire de même à propos des conditions (M), (J) et  $(J_1)$  en vertu des résultats suivants.

**THÉOREME 9.** — *Si deux treillis quelconques  $S$  et  $T$  satisfont à la condition (B), le produit cardinal  $S \times T$  satisfait à la condition (M).*

C'est une conséquence immédiate du lemme 3.

**THÉOREME 10.** — *Si deux treillis quelconques  $S$  et  $T$  satisfont à la condition (F), le produit cardinal  $S \times T$  satisfait aux conditions (J) et  $(J_1)$ .*

C'est une conséquence du lemme suivant, analogue au lemme 3.

**LEMME 6.** — *Soient  $x = (p, q)$  et  $y = (u, v)$  deux éléments du produit cardinal  $S \times T$  de deux treillis  $S$  et  $T$ . Si une chaîne maximale  $\{(x_i, y_i)\}$  du produit cardinal  $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$  est obtenue sous la forme  $x_i = z_i \wedge x$ ,  $y_i = z_i \wedge y$  à partir d'une chaîne  $\{z_i\}$  entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ , si, dans le treillis  $S$ , le couple  $(p, u)$  possède la propriété  $f$  et si, dans le treillis  $T$ , le couple  $(q, v)$  possède la propriété  $f$ , la chaîne  $\{x_i \vee y_i\}$  est maximale entre  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ .*

La démonstration du lemme 6 est analogue à celle du lemme 3.

## 3. PASSAGE AUX TREILLIS HOMOMORPHES.

a)  $\vee$ —homomorphisme : Un treillis  $\vee$ —homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie n'est pas nécessairement semi-modulaire<sup>(3)</sup>. En effet, le treillis S figuré par le diagramme ci-contre (qui est même distributif) admet comme treillis  $\vee$ —homomorphe le treillis  $T_2$  également figuré (qui est le treillis non modulaire à cinq éléments).

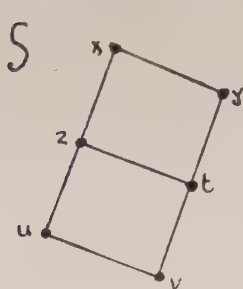


FIG. 19

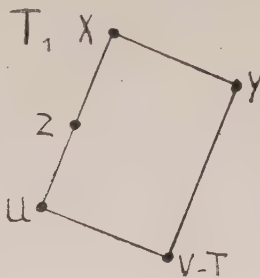


FIG. 20

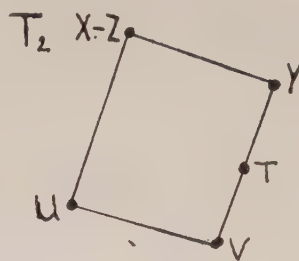


FIG. 21

Aucune des conditions étudiées ne se conserve donc par  $\vee$ —homomorphisme dans des circonstances générales intéressantes.

b)  $\wedge$ —homomorphisme : Un treillis  $\wedge$ —homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie n'est pas non plus nécessairement semi-modulaire. En effet, le treillis S précédent admet comme treillis  $\wedge$ —homomorphe le treillis  $T_1$  figuré plus haut (qui est encore le treillis non modulaire à cinq éléments).

On ne peut donc espérer aucun résultat intéressant concernant la conservation éventuelle par  $\wedge$ —homomorphisme des conditions étudiées.

c) homomorphisme : Un treillis homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie est semi-modulaire (ceci est d'ailleurs une conséquence du théorème 11 ci-dessous).

Néanmoins, comme le montrent les contre-exemples suivants, aucune des conditions étudiées ne se conserve par homomorphisme pour un

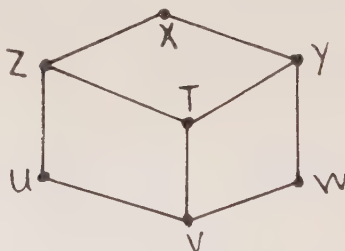


FIG. 22

(3) Contrairement à l'affirmation de G. BIRKHOFF [1], p. 103 : l'erreur provient du fait que  $x$  peut couvrir  $y$  dans un treillis S sans que X couvre Y (tout en étant distinct de Y) dans un treillis  $\vee$ —homomorphe à S; le fait devient exact dans un treillis homomorphe à S.

treillis quelconque même complet et la plupart d'entre elles ne se conservent pas, même pour un treillis satisfaisant à une condition de chaîne. En effet, le treillis C 9 (T, chapitre II) peut être appliqué sur le treillis C' représenté page précédente par  $e \rightarrow X$ ,  $e_{i_0} \rightarrow Y$ ,  $e_{o_j} \rightarrow Z$ ,  $e_{i_j} \rightarrow T$ ,  $a_{o_j} \rightarrow U$ ,  $a_{i_j} \rightarrow V$ ,  $\bar{a}_{i_0} \rightarrow W$ , et cette application réalise un homomorphisme. De même, le treillis B 13 peut être appliqué sur le treillis  $T_2$  par :  $b_j \rightarrow X$ ,  $c_k \rightarrow Y$ ,  $b \rightarrow T$ ,  $a_i \rightarrow U$ ,  $a \rightarrow V$  et cette application réalise aussi un homomorphisme.

Nous donnerons, cependant, le résultat positif suivant.

**THÉORÈME 11.** — *Si un treillis S satisfait à la condition de chaîne ascendante et à la condition (5), il en est de même de tout treillis homomorphe T.*

Soit, dans le treillis T, trois éléments X, Y, Z tels que l'on ait  $X \wedge Y < X < Z < X \vee Y$ . Il faut montrer qu'il existe un élément U tel que  $Z \wedge Y < U \leq Y$  et  $(U \vee X) \wedge Z = X$ . Posons  $A = Z \wedge Y = X \wedge Y$  et  $B = X \vee Y = Z \vee Y$ . Soit  $a$  l'élément de S maximum parmi ceux qui sont appliqués sur A (il existe en vertu de la condition de chaîne ascendante car l'union de deux éléments appliqués sur A est appliquée sur A). Soient  $x$  et  $y$  des éléments appliqués sur X et Y respectivement et tels que l'on ait  $x > a$  et  $y > a$  (il en existe car, si  $x'$  est appliqué sur X,  $x' \vee a$  est appliqué sur  $X \vee A = X$ ). D'après l'hypothèse faite sur  $a$ , on a certainement  $x \wedge y = a$  car  $x \wedge y \geq a$  est appliqué sur  $X \wedge Y = A$ . Soit  $z$  appliqué sur Z et tel que l'on ait  $z > x$ . On a aussi  $z \wedge y = a$  car  $z \wedge y \geq a$  est appliqué sur  $Z \wedge Y = A$ . Les éléments  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de S sont donc tels que  $z \wedge y < x < z < z \vee y$ . Le treillis S satisfaisant à la condition (5), il existe un élément  $u$  de S tel que l'on ait  $a < u \leq y$  et  $(u \vee x) \wedge z = x$ . Soit U l'élément de T sur lequel est appliqué  $u$ . On a  $Z \wedge Y \leq U \leq Y$  et  $(U \vee X) \wedge Z = X$ . Finalement on a  $Z \wedge Y \neq U$ . En effet, si on avait  $Z \wedge Y = U$ , on aurait  $u \rightarrow A$  avec  $u > a$ , ce qui contredit le choix de  $a$ . Le treillis T satisfait donc à la condition (5).

7

{

「

D

{

{

{

**LEMME 1.** — *Si l'on a  $a_{ij} = a_{i,j-1}$  pour une valeur de  $i$  et une valeur de  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ), on a aussi  $b_{ji} = b_{j,i-1}$  si et seulement si*  

$$a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{i-1} \text{ (I')}.$$

*Démonstration.* — Les conditions successives suivantes sont toutes équivalentes :

$$a_{ij} = a_{i,j-1} \text{ soit } a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1}).$$

$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} \leq a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j).$$

$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} \leq [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)] \wedge b_{j-1}.$$

$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)] \wedge b_{j-1} = a_{ij} \wedge b_{j-1}.$$

De la même façon, on voit que  $b_{ji} = b_{j,i-1}$  équivaut à  $b_{j-1} \wedge a_{i-1} = b_{j-1} \wedge a_{i-1}$ .

De là, l'affirmation du lemme résulte immédiatement <sup>(1)</sup>.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme.

**THÉORÈME 1.** — *Si l'égalité (I') est valable quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ), les subdivisions  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$  des chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$  simplifiées par suppression des répétitions ont même longueur.*

Avant d'établir les théorèmes que nous avons en vue, établissons quelques lemmes :

**LEMME 2.** — *Si l'égalité (I') est valable quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ), les subdivisions de  $\{a_{ij}\}$  par rapport à  $\{b_j\}$ , de  $\{b_j\}$  par rapport à  $\{a_{ij}\}$  coïncident avec  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$  respectivement, à des répétitions près.*

*Démonstration.* — Nous représentons par  $a_{ij,q}$  l'intercalaire  $a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_q)$  et par  $b_{q,ij}$  l'intercalaire  $b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{ij})$ .

a) Évaluons  $a_{ij,q}$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ,  $0 \leq q \leq \beta$ ).

1) On a  $a_{ij,j} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)$ . Or, on peut écrire  $a_{ij,j} \wedge b_j = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_j = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_j \wedge a_{i-1} = b_j \wedge a_{i-1}$ . D'où  $a_{ij,j} = a_i \vee (a_{i-1} \vee b_j) \vee (b_j \wedge a_{i-1}) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) = a_{ij}$ .

2) On a  $a_{ij,j-1} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})$ . Or, on peut écrire  $a_{ij,j-1} \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_{j-1} \wedge a_{i-1} = b_{j-1} \wedge a_{i-1}$ . D'où  $a_{ij,j-1} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) \vee (b_{j-1} \wedge a_{i-1}) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1}) = a_{ij,j-1}$ .

3) On sait que  $a_{ij,0} = a_{i,j-1}$ ,  $a_{ij,\beta} = a_{ij}$ .

Il en résulte que, pour  $q \leq j-1$ , on a  $a_{ij,j-1} \leq a_{ij,q} \leq a_{ij,0}$ , soit  $a_{ij,j-1} < a_{ij,q} \leq a_{ij,j-1}$ , d'où  $a_{ij,q} = a_{ij,j-1}$ . De même, pour  $q \geq j$ , on a  $a_{ij,j} \geq a_{ij,q} \geq a_{ij,\beta}$  soit  $a_{ij,j} \geq a_{ij,q} \geq a_{ij,j}$ , d'où  $a_{ij,q} = a_{ij,j}$ .

b) Évaluons  $b_{q,ij}$  ( $0 < q \leq \beta$ ,  $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 \leq j \leq \beta$ ).

(1) On peut, dans l'énoncé du lemme 1, remplacer la condition (I') par la condition  $a_{ii} \wedge b_{j-1} \leq b_{ji} \wedge a_{i-1}$ . En effet, en présence de  $a_{ii} = a_{i,j-1}$ , cette condition entraîne  $b_{j-1} \wedge a_{i-1} \leq b_{ji} \wedge a_{i-1}$  qui équivaut à  $b_{ji} = b_{i,j-1}$ .

1) On a  $b_{q,iq} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{iq})$ . Or, d'après l'égalité (I'), on a  $b_{q-1} \wedge a_{iq} = b_{qi} \wedge a_{i-1} \leq b_{qi}$ . On a aussi  $b_q \leq b_{qi}$ . Il vient  $b_{q,iq} \leq b_{qi}$ . D'autre part, de  $a_i \leq a_{iq}$ , on déduit  $b_{q,iq} \geq b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_i) = b_{qi}$ . Donc, on a  $b_{q,iq} = b_{qi}$ .

2) On a  $b_{q,iq-1} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{iq-1})$ . Or, d'après a) 2), on a  $b_{q-1} \wedge a_{iq-1} = b_{q-1} \wedge a_{i-1}$ . D'où  $b_{q,iq-1} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{i-1}) = b_{qi-1}$ .

3) On sait que  $b_{q,i0} = b_{qi-1}$ ,  $b_{q,i\beta} = b_{qi}$ .

Il en résulte que, pour  $j \leq q-1$ , on a  $b_{q,iq-j} \leq b_{q,iq} \leq b_{q,i0}$ , soit  $b_{q,i-1} \leq b_{q,iq-j} \leq b_{qi-1}$ , d'où  $b_{q,iq-j} = b_{qi-1}$ . De même, pour  $j \geq q$ , on a  $b_{q,iq} \geq b_{q,iq-j} \geq b_{q,i\beta}$ , soit  $b_{qi} \leq b_{q,iq-j} \leq b_{qi}$ , d'où  $b_{q,iq-j} = b_{qi}$ .

LEMME 3. — Soit  $m$  l'indice courant des éléments de la chaîne  $\{a_{ij}\}$  ( $m$  varie de 0 à  $\alpha\beta$  et l'élément  $a_{ij}$  est aussi représenté par  $a_m$ , ou  $m = j + (i-1)\beta$ ). On a  $a_{mq} = a_{mq-1}$  si et seulement si  $b_{qm} = b_{qm-1}$  ( $0 < m \leq \alpha\beta$ ,  $0 < q \leq \beta$ ). Pour les chaînes  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$ , sont valables les égalités analogues à (I') :  $a_{mq} \wedge b_{q-1} = b_{qm} \wedge a_{m-1}$ , pour tout  $m$  et tout  $q$  tels que  $0 < m \leq \alpha\beta$ ,  $0 < q \leq \beta$ .

Démonstration. — D'après l'étude faite dans la démonstration du lemme précédent, si on a  $q \neq j$ , on a à la fois  $a_{mq} = a_{mq-1}$  et  $b_{qm} = b_{qm-1}$ .

Si  $q = j$ , on a  $a_{mq} = a_{ij}$ ,  $a_{mq-1} = a_{ij-1}$ ;  $b_{qm} = b_{ji}$ ,  $b_{qm-1} = b_{ji-1}$ . Mais, compte tenu du fait que  $a_{ij} = a_{ij-1}$  équivaut à  $b_{ji} = b_{ji-1}$  on a encore  $a_{mq} = a_{mq-1} \leftrightarrow b_{qm} = b_{qm-1}$ .

Il résulte de là que les égalités analogues à (I') sont certainement valables pour tout couple  $(m, q)$  tel que  $a_{mq} = a_{mq-1}$ .

Le seul cas où il soit possible d'avoir  $a_{mq} \neq a_{mq-1}$  est celui où  $q = j$ . Or, dans ce cas, on peut écrire  $b_{ji} \wedge a_{i-1} = a_{ij} \wedge b_{j-1}$  (c'est l'égalité (I') pour les chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$ ); compte tenu du fait que l'on a  $a_{ij-1} \leq a_{i-1}$ , on en déduit  $b_{ji} \wedge a_{ij-1} \leq a_{ij} \wedge b_{j-1}$ ; d'autre part, on voit que  $a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{i-1} \leq b_{ji}$  et  $a_{ij} \wedge b_{j-1} \leq a_{ij} \leq a_{ij-1}$  d'où l'on tire  $a_{ij} \wedge b_{j-1} \leq b_{ji} \wedge a_{ij-1}$ ; finalement, on a  $a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{ij-1}$  et cette égalité n'est autre que l'égalité  $a_{mq} \wedge b_{q-1} = b_{qm} \wedge a_{m-1}$  écrite pour  $q = j$ .

LEMME 4. — Si l'égalité (I') est valable quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) pour les chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$ , les subdivisions de  $\{a_{ij}\}$  par rapport à  $\{b_{ji}\}$ , de  $\{b_{ji}\}$  par rapport à  $\{a_{ij}\}$  coïncident avec  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$  respectivement, à des répétitions près.

Démonstration. — D'après le lemme précédent, l'égalité analogue à (I') est valable quels que soient  $m$  et  $q$  ( $0 < m \leq \alpha\beta$ ,  $0 < q \leq \beta$ ) pour les chaînes  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_q\}$ . D'autre part, d'après le lemme 2, les subdivisions de  $\{a_{ij}\}$  par rapport à  $\{b_q\}$  et de  $\{b_q\}$  par rapport à  $\{a_{ij}\}$  coïncident avec  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$  respectivement. Il suffit d'appliquer le lemme 2 aux chaînes  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_q\}$  prises comme chaînes initiales pour obtenir le résultat annoncé.

LEMME 5. — Soit  $n$  l'indice courant des éléments de la chaîne  $\{b_{ji}\}$  ( $n$  varie de 0 à  $\alpha\beta$  et l'élément  $b_{ji}$  est aussi représenté par  $b_n$ , où  $n = i + (j - 1)\alpha$ ). Si l'égalité (I') est valable quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) pour les chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$ , l'égalité analogue est valable quels que soient  $m$  et  $n$  ( $0 < m, n \leq \alpha\beta$ ) pour les chaînes  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ji}\}$ .

Démonstration. — Il suffit de raisonner comme dans la démonstration du lemme précédent et finalement d'appliquer le lemme 3.

Les théorèmes suivants sont alors des conséquences immédiates du lemme 5.

THÉORÈME 2. — Si l'égalité (I') est vérifiée quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (I') <sup>(2)</sup>, elles ont même longueur.

THÉORÈME 3. — Si l'égalité (I') est vérifiée quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{a_i\}$  et  $\{b_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales dans le treillis auquel elles appartiennent (ou dans un sous-treillis), elles ont même longueur <sup>(3)</sup>.

(2) C'est-à-dire qu'on ne peut trouver de subdivisions véritables de ces chaînes telles que l'égalité (I') y reste satisfaite.

(3) Le théorème 3 est d'ailleurs conséquence directe du théorème 1.

## CHAPITRE V

**Quelques cas d'égalité des longueurs de deux chaînes de sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible. Application à deux chaînes de sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversible, à deux chaînes de sous-groupes partiels d'un groupe partiel et, en particulier, à deux chaînes de sous-groupes d'un groupe et à deux chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.**

### 1. HYPERGROUPES PARTIELS.

Introduisons d'abord la notion d'hypergroupe partiel <sup>(1)</sup>.

a) *Définition* : Un *hypergroupe partiel*  $H$  est un système <sup>(2)</sup> associatif <sup>(3)</sup> qui possède un sous-ensemble  $U$  d'éléments unités scalaires <sup>(4)</sup> et est tel que chaque élément admette un élément inverse à droite <sup>(5)</sup> unique et un élément inverse à gauche unique.

On déduit facilement de cette définition, les conséquences suivantes :

1)  $U$  est non vide d'après l'existence des éléments inverses.

2) Tout élément  $\varepsilon \in U$  est tel que  $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$  : en effet, d'après l'existence des éléments inverses à droite, il existe un élément  $\alpha$ , inverse à droite de  $\varepsilon$ , tel que  $\varepsilon\alpha$  ait un sens;  $\varepsilon$  étant un élément unité scalaire, on a  $\varepsilon\alpha = \alpha$ ; on en déduit que  $\varepsilon(\varepsilon\alpha)$  a un sens, donc que  $\varepsilon\varepsilon$  a un sens d'après l'associativité; finalement, on a  $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$ .

3) Tout élément  $\alpha \in H$  admet un et un seul élément unité à droite, un et un seul élément unité à gauche : il existe un élément  $\alpha''$  inverse à gauche de  $\alpha$ , tel que  $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$  où  $\varepsilon \in U$ ;  $\varepsilon\varepsilon$  ayant un sens,  $(\alpha''\alpha)\varepsilon$  a un sens, et  $\alpha\varepsilon$  a un sens d'après l'associativité;  $\varepsilon$  est donc élément unité à droite

(1) Il semble que les hypergroupes partiels, en particulier les hypergroupes partiels inversibles définis plus loin, constituent un type remarquable de systèmes à une opération (non nécessairement uniforme, ni partout définie). J'ai déjà eu l'occasion de les utiliser par ailleurs : *Algèbres de relations et hypergroupes partiels*, C. R., 228, 1949, p. 1181.

(2) Suivant la terminologie de J. KUNTZMANN [1], j'appelle système (à une opération) un ensemble  $\{\alpha, \beta, \dots\}$  dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un sous-ensemble non vide. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont composables,  $\alpha\beta$  représente le sous-ensemble produit. Si ce sous-ensemble contient un seul élément  $\gamma$ , on écrira, par abus de langage,  $\alpha\beta = \gamma$  (au lieu de  $\alpha\beta = \{\gamma\}$ ).

(3) L'associativité peut s'énoncer ainsi : 1)  $(\alpha\beta)\gamma$  a un sens en même temps que  $\alpha(\beta\gamma)$ , ce qui veut dire, pour  $(\alpha\beta)\gamma$  par exemple, que  $\alpha\beta$  a un sens, puis que  $(\alpha\beta)\gamma$  a un sens. Ceci fait intervenir le produit d'un sous-ensemble et d'un élément; plus généralement, on définit le produit  $AB$  de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  comme la réunion si elle est non vide des produits  $\alpha\beta$  ayant un sens quand  $\alpha$  décrit  $A$  et  $\beta$  décrit  $B$ ; si cette réunion est vide, on dit que  $AB$  n'a pas de sens. 2) Si  $(\alpha\beta)\gamma$  et  $\alpha(\beta\gamma)$  ont un sens, on a  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .

(4) Un élément  $\varepsilon$  est dit élément unité (ou plus brièvement unité) si  $\varepsilon\alpha \in \alpha$  pour tout  $\alpha$  tel que  $\varepsilon\alpha$  ait un sens, si  $\beta\varepsilon \in \beta$  pour tout  $\beta$  tel que  $\beta\varepsilon$  ait un sens et si  $\varepsilon$  est composable d'un côté avec au moins un élément. Un élément  $\sigma$  est dit scalaire si  $\sigma\alpha$  et  $\beta\sigma$  se réduisent à un seul élément quand ils sont définis.

(5) Un élément  $\alpha'$  est dit inverse à droite de  $\alpha$  si  $\alpha\alpha'$  a un sens et si  $\alpha\alpha' \wedge U$  est non vide.

de  $\alpha$ ; si  $\varepsilon'$  est aussi élément unité à droite de  $\alpha$ ,  $(\alpha\varepsilon)\varepsilon'$  a un sens, donc  $\varepsilon\varepsilon'$  a un sens, et on a  $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$ . Démonstration analogue pour les éléments unités à gauche. On voit de plus que  $\alpha''\alpha \wedge U$  contient un seul élément qui est l'unité à droite de  $\alpha$ . De même,  $\alpha\alpha' \wedge U$  contient un seul élément qui est l'unité à gauche de  $\alpha$ . Le sous-ensemble  $U$  est unique.

4)  $\alpha\beta$  a un sens si et seulement si l'unité à droite de  $\alpha$  coïncide avec l'unité de gauche de  $\beta$  : si  $\alpha\beta$  a un sens et si  $\varepsilon$  est l'unité à droite de  $\alpha$ ,  $(\alpha\varepsilon)\beta$  a un sens, donc  $\varepsilon\beta$  a un sens et  $\varepsilon$  est l'unité à gauche de  $\beta$ ; si  $\varepsilon$  est à la fois unité à droite de  $\alpha$  et unité à gauche de  $\beta$  et si  $\alpha''$  est l'inverse à gauche de  $\alpha$ ,  $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$  et  $(\alpha''\alpha)\beta$  a un sens, donc  $\alpha\beta$  a un sens.

5)  $(\alpha\beta)\gamma$  a un sens dès que  $\alpha\beta$  et  $\beta\gamma$  sont définis : tout élément de  $\alpha\beta$  admet pour unité à droite celle de  $\beta$  (en effet, si  $\xi \in \alpha\beta$  et si  $\xi\varepsilon$  a un sens,  $(\alpha\beta)\varepsilon$  a un sens, donc  $\beta\varepsilon$  a un sens); donc, si  $\xi \in \alpha\beta$ ,  $\xi\gamma$  ayant un sens d'après 4),  $(\alpha\beta)\gamma$  a un sens.

b) *Définition* : Un sous-ensemble  $H'$  d'un hypergroupe partiel  $H$  est dit sous-hypergroupe partiel s'il est lui-même un hypergroupe partiel vis-à-vis de la même loi de composition. Aux sous-hypergroupes partiels envisagés par la suite, j'imposerai la condition supplémentaire :  $H' \supset U$  (sans le spécifier à nouveau).

L'ensemble  $U'$  des unités d'un sous-hypergroupe partiel  $H'$  coïncide nécessairement avec  $U$  : en effet, pour tout  $\varepsilon \in U \subset H'$ , il existe dans  $U'$  un élément unité à droite soit  $\varepsilon'$  et on a  $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$ , d'où  $U \subset U'$ ; d'autre part, pour tout  $\varepsilon' \in U'$ , il existe dans  $U \subset H'$  un élément unité à droite soit  $\varepsilon$  et on a  $\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon = \varepsilon$  d'où  $U' \subset U$  <sup>(6)</sup>.

$H'$  doit contenir, en même temps que  $\alpha$  et  $\beta$ , tout élément du produit  $\alpha\beta$ . Il doit contenir, en même temps que  $\alpha$ , ses inverses  $\alpha'$  et  $\alpha''$ .

Réciproquement, si on a  $H' \supset U$  et si ces deux conditions sont satisfaites,  $H'$  est un sous-hypergroupe partiel.

c) *Définition* <sup>(7)</sup> : Un hypergroupe partiel  $M$  est dit *inversible* si  $\alpha\beta \ni \gamma$  implique  $\alpha''\gamma \ni \beta$  et  $\gamma\beta' \ni \alpha$ , où  $\alpha''$  est l'inverse à gauche de  $\alpha$  et  $\beta'$  l'inverse à droite de  $\beta$ . Il est dit *normal* si  $\xi \in \alpha\beta$ ,  $\eta \in \beta\gamma$  entraînent  $\xi\gamma \wedge \alpha\eta \neq \phi$ . Il est dit *résoluble* si  $\alpha\beta \wedge \gamma\delta \neq \phi$  entraîne l'existence de  $\varphi$  tel que l'on ait  $\alpha \in \gamma\varphi$  et  $\delta \in \varphi\beta$ .

THÉORÈME 1. — Dans un hypergroupe partiel inversible  $M$ , l'inverse est bilatère (on désignera par  $\bar{\alpha}$  l'inverse de  $\alpha$ ) et les relations  $\alpha\beta \ni \gamma$  et  $\bar{\beta}\bar{\alpha} \ni \bar{\gamma}$  sont équivalentes.

(6) Si on n'impose pas  $H' \supset U$ , il n'est pas nécessaire qu'on ait  $U' \subset U$ . Dans l'exemple de J. KUNTZMANN [1], p. 170, on peut prendre  $H' = U' = \{a\}$ , alors que l'on a  $U = \{e\}$ .

(7) Ces définitions sont données dans J. KUNTZMANN [1], p. 165 et p. 162 pour des systèmes quelconques.

*Démonstration :* De  $\alpha\alpha' \ni \varepsilon$ , on déduit  $\alpha''\varepsilon \ni \alpha'$  soit  $\alpha'' = \alpha''\varepsilon = \alpha'$ .

De  $\alpha\beta \ni \gamma$ , on déduit  $\overline{\alpha\gamma} \ni \beta$ , puis  $\overline{\beta\gamma} \ni \alpha$ , enfin  $\overline{\beta\alpha} \ni \gamma$ . De même, de  $\overline{\beta\alpha} \ni \gamma$ , on déduit  $\alpha\beta \ni \gamma$ .

**THÉORÈME 2.** — *Dans un hypergroupe partiel, les trois définitions précédentes sont équivalentes* <sup>(8)</sup>.

*Démonstration :* 1) Un hypergroupe partiel inversible est normal. En effet, on a les implications suivantes :  $\alpha\beta \ni \xi$  et  $\beta\gamma \ni \eta \rightarrow \overline{\eta\gamma} \ni \beta$  et  $\alpha\beta \ni \xi \rightarrow \alpha\eta\gamma \ni \xi \rightarrow$  il existe  $\mu$  tel que  $\alpha\eta \ni \mu$  et  $\mu\gamma \ni \xi \rightarrow \xi\gamma \ni \mu$  et  $\alpha\eta \ni \mu$ .

2) Un hypergroupe partiel inversible est résoluble. En effet, on a successivement :  $\mu \in \alpha\beta$  et  $\mu \in \gamma\delta \rightarrow \alpha \in \mu\overline{\beta} \subset \gamma\delta\overline{\beta} \rightarrow$  il existe  $\nu$  tel que  $\alpha \in \gamma\nu$  et  $\nu \in \delta\overline{\beta} \rightarrow \alpha \in \gamma\nu$  et  $\delta \in \nu\beta$ .

3) Un hypergroupe partiel résoluble est inversible. De  $\gamma \in \alpha\beta$ , on déduit, compte tenu de  $\gamma \in \gamma\varepsilon$  où  $\varepsilon$  est l'unité à droite de  $\gamma$ , qu'il existe  $\varphi$  tel que  $\alpha \in \gamma\varphi$  et  $\varepsilon \in \varphi\beta$ ; on a nécessairement  $\varphi = \beta''$ , inverse à gauche de  $\beta$ , d'où  $\alpha \in \gamma\beta''$ . De  $\gamma \in \alpha\beta$ , on déduit aussi, compte tenu de  $\gamma \in \varepsilon_1\gamma$  où  $\varepsilon_1$  est l'unité à gauche de  $\gamma$ , qu'il existe  $\varphi_1$  tel que  $\varepsilon_1 \in \alpha\varphi_1$  et  $\beta \in \varphi_1\gamma$ ; on a nécessairement  $\varphi_1 = \alpha'$ , inverse à droite de  $\alpha$ , d'où  $\beta \in \alpha'\gamma$ . Appliquons alternativement ces deux remarques; il vient successivement :  $\alpha \in \gamma\beta''$ ,  $\beta'' \in \gamma'\alpha$ ,  $\gamma' \in \beta''\alpha''$ ,  $\alpha'' \in \beta\gamma'$ ,  $\beta \in \alpha''\gamma$  d'une part,  $\beta \in \alpha'\gamma$ ,  $\alpha' \in \beta\gamma''$ ,  $\gamma'' \in \beta'\alpha'$ ,  $\beta' \in \gamma''\alpha$ ,  $\alpha \in \gamma\beta'$  d'autre part.

4) Un hypergroupe partiel normal est inversible. De  $\alpha\beta \ni \gamma$ , on déduit, compte tenu de  $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$  qu'il existe  $\mu$  tel que  $\mu \in \varepsilon\beta$  et  $\mu \in \alpha''\gamma$ ; on a nécessairement  $\mu = \beta$ , d'où  $\beta \in \alpha''\gamma$ . De même, on montre que  $\alpha\beta \ni \gamma$  implique  $\alpha \in \gamma\beta'$ .

d) De façon à éclairer un peu la structure des hypergroupes partiels inversibles, mettons en évidence quelques types plus particuliers de ces systèmes.

Nous désignerons par  $M_1$ ,  $M'$  ou  $M_2$  des hypergroupes partiels inversibles dans lesquels on a l'une des conditions supplémentaires :

(IV<sub>1</sub>) Si  $\varepsilon \in U$  et si  $\varepsilon' \in U$ , il existe au moins un élément  $\alpha \in M_1$  tel que  $\varepsilon\alpha$  et  $\alpha\varepsilon'$  aient un sens.

(IV') Si  $\varepsilon \in U$ ,  $\varepsilon' \in U$  et s'il existe  $\alpha \in M'$  tel que  $\varepsilon\alpha$  et  $\alpha\varepsilon'$  aient un sens, il existe au moins un élément scalaire  $\sigma \in M'$  tel que  $\varepsilon\sigma$  et  $\sigma\varepsilon'$  aient un sens.

(IV<sub>2</sub>) Si  $\varepsilon \in U$  et si  $\varepsilon' \in U$ , il existe au moins un élément scalaire  $\sigma \in M_2$  tel que  $\varepsilon\sigma$  et  $\sigma\varepsilon'$  aient un sens.

*Définition :* On dit qu'un système  $S$  est la *juxtaposition* des systèmes  $S_i$  ( $i \in I$ ) si l'ensemble des éléments de  $S$  est exactement l'ensemble des éléments de tous les  $S_i$  et si deux éléments d'un même  $S_i$  sont composables

(8) Le théorème 2 est démontré pour un hypergroupe dans J. KUNTZMANN [1], pp. 191-192.

dans  $S$  comme ils l'étaient dans  $S_i$ , deux éléments appartenant à des  $S_i$  distincts n'étant jamais composables.

**THÉORÈME 3.** — *Tout système  $M$  (hypergroupe partiel inversible) est la juxtaposition de systèmes  $M_1$  et réciproquement.*

*Démonstration :* Considérons parmi les éléments de  $M$ , la relation  $\alpha \mathcal{R} \beta$  s'il existe un élément  $\gamma$  tel que  $\alpha \gamma \beta$  ait un sens.  $\mathcal{R}$  est réflexive :  $\alpha \mathcal{R} \alpha$  pour tout  $\alpha$  (on prend  $\gamma = \alpha$ ).  $\mathcal{R}$  est symétrique :  $\alpha \mathcal{R} \beta \rightarrow \beta \mathcal{R} \alpha$  (si  $\alpha \gamma \beta$  a un sens, on prend l'inverse d'un élément quelconque de  $\alpha \gamma \beta$ ).  $\mathcal{R}$  est transitive  $\alpha \mathcal{R} \beta, \beta \mathcal{R} \delta \rightarrow \alpha \mathcal{R} \delta$  (si  $\alpha \gamma \beta$  et  $\beta \gamma' \delta$  ont un sens, on prend un élément quelconque de  $\gamma \beta \gamma'$ ).  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et réalise une partition de  $M$ . Les différentes classes de cette partition sont des systèmes  $M_1$  et on a la décomposition cherchée.

La réciproque est évidente.

**COROLLAIRE 1.** — *Tout système  $M'$  est la juxtaposition de systèmes  $M_2$  et réciproquement.*

Imposons à un hypergroupe partiel inversible <sup>(9)</sup> la condition supplémentaire

(U) La loi de composition est uniforme (autrement dit, tous les éléments sont scalaires).

Nous obtenons le *groupe partiel*, système  $U$  satisfaisant aux trois premiers axiomes des groupoïdes de Brandt <sup>(10)</sup>.

Imposons à un groupe partiel la condition  $(IV_1)$  ou  $(IV_2)$  : nous obtenons le *groupoïde de Brandt*.

**COROLLAIRE 2.** — *Tout groupe partiel est la juxtaposition de groupoïdes de Brandt et réciproquement.*

Restreignons maintenant l'hypergroupe partiel inversible dans une autre direction en lui imposant la condition supplémentaire <sup>(11)</sup> :

(P) La loi de composition est parfaite (tout produit  $\alpha \beta$  a un sens).

D'après l'unicité des éléments unités, il en résulte que le sous-ensemble  $U$  contient un seul élément (unité bilatère et scalaire). On voit immédiatement que le système ainsi obtenu est l'*hypergroupe inversible* <sup>(12)</sup>.

**THÉORÈME 4.** — *Le produit direct d'un groupoïde de Brandt  $B$  et d'un hypergroupe inversible  $P$  est un système  $M_2$ . Réciproquement, tout système  $M_2$  est le produit direct d'un groupoïde de Brandt et d'un hypergroupe inver-*

(9) Pour obtenir le groupe partiel, il suffit d'ailleurs d'imposer (U) à l'hypergroupe partiel le plus général : l'inversibilité est conséquence de (U).

(10) Cf. H. BRANDT [1], p. 360, ou P. DUBREIL [1], p. 30.

(11) Cette condition (P) imposée à l'hypergroupe partiel le plus général donne l'hypergroupe le plus général (J. KUNTZMANN [1], p. 165).

(12) J. KUNTZMANN [1], p. 165. L'auteur dit « inversable » auquel il est préféré ici « inversible » dont le sens courant répond mieux à la notion qualifiée.

sible. On peut même imposer au groupoïde de Brandt d'être d'ordre 1; la représentation du système  $M_2$  sous cette forme est alors unique<sup>(13)</sup>.

Démonstration : Soit un groupoïde de Brandt  $B$  d'élément générique  $\alpha$  ( $\bar{\alpha}$ , inverse de  $\alpha$ ), d'unités  $\varepsilon_i$  et un hypergroupe inversible  $P$  d'élément générique  $x$  ( $\bar{x}$ , inverse de  $x$ ), d'unité  $e$ . L'ensemble produit, ensemble des  $(\alpha, x)$ , muni de l'opération produit est un hypergroupe inversible  $M_2$  dont les unités sont les  $(\varepsilon_i, e)$  et où l'inverse de  $(\alpha', x)$  est  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ .

Envisageons maintenant un système  $M_2$ . Remarquons d'abord que l'ensemble des éléments de  $M_2$  admettant un quelconque élément unité  $\varepsilon$  comme unité à droite et à gauche est un hypergroupe inversible  $P$  si on le munit de la multiplication existant dans  $M_2$  :  $\varepsilon$  est l'élément unité et  $\bar{\alpha}$  est l'inverse de  $\alpha$  pour tout  $\alpha \in P$ . Choisissons alors, pour toute unité  $\varepsilon_i$ , un élément scalaire  $\sigma_i$  admettant  $\varepsilon$  comme unité à gauche et  $\varepsilon_i$  comme unité à droite. L'ensemble des éléments de la forme  $\bar{\sigma}_i \sigma_j$  constitue un groupoïde de Brandt d'ordre 1,  $B'$ , par rapport à la multiplication dans  $M_2$  : les unités sont celles de  $M_2$ ,  $\bar{\sigma}_j \sigma_i$  est l'inverse de  $\bar{\sigma}_i \sigma_j$ . Tout élément  $\xi$  de  $M_2$  s'écrit, et d'une façon unique, sous la forme  $\bar{\sigma}_i \alpha \sigma_j$ , où  $\alpha \in P$ ; en effet, si  $\xi$  admet pour unités à gauche et à droite  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  respectivement, on a  $\xi = \bar{\sigma}_i (\sigma_i \xi \sigma_j) \sigma_j$  et  $\sigma_i \xi \sigma_j \in P$ ; d'autre part, on a  $\bar{\sigma}_i \alpha \sigma_j = \bar{\sigma}_i \alpha' \sigma_{j'} \rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i'}$  et  $\varepsilon_j = \varepsilon_{j'} \rightarrow \sigma_i = \sigma_{i'}$  et  $\sigma_j = \sigma_{j'}$ , et, en multipliant à gauche par  $\sigma_i$ , à droite par  $\bar{\sigma}_j$ ,  $\alpha = \alpha'$ .  $M_2$  est alors isomorphe à  $B' \times P$ , ensemble des couples  $(\bar{\sigma}_i \sigma_j, \alpha)$  avec la multiplication produit de la multiplication dans  $B'$  et de la multiplication dans  $P$  : la correspondance biunivoque est définie par l'application de  $\bar{\sigma}_i \alpha \sigma_j$  sur  $(\bar{\sigma}_i \sigma_j, \alpha)$  et l'opération est bien respectée.

La représentation de  $M_2$  sous cette forme est unique car, dans un produit direct  $B' \times P$ ,  $P$  est isomorphe à l'ensemble des éléments admettant une unité quelconque comme unité à gauche et à droite, et  $B'$  est isomorphe à l'ensemble des couples de ses unités (avec  $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$   $(\varepsilon_h, \varepsilon_k) = (\varepsilon_i, \varepsilon_k)$  si  $j = h$ ) ou à l'ensemble des couples des unités de  $B' \times P$  (avec la loi analogue).

Désignons par  $\{X\}$  un ensemble d'axiomes caractérisant les systèmes  $X$  où l'on prend successivement pour systèmes  $X$  les hypergroupes partiels inversibles  $M$ , les systèmes  $M'$ , les systèmes  $M_1$ , les systèmes  $M_2$ , les groupes partiels  $U$ , les groupoïdes de Brandt  $B$ , les hypergroupes inversibles  $P$ , les groupes  $G$ , les groupoïdes de Brandt  $B'$  d'ordre 1 et le système  $E$  à un élément  $\varepsilon$  avec la loi de composition  $\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$ .

(13) Ceci généralise le fait qu'un groupoïde de Brandt est d'une manière unique le produit direct d'un groupoïde de Brandt d'ordre 1 et d'un groupe. Cf. H. BRANDT [1], p. 363.

On a, entre ces ensembles d'axiomes, les implications suivantes :

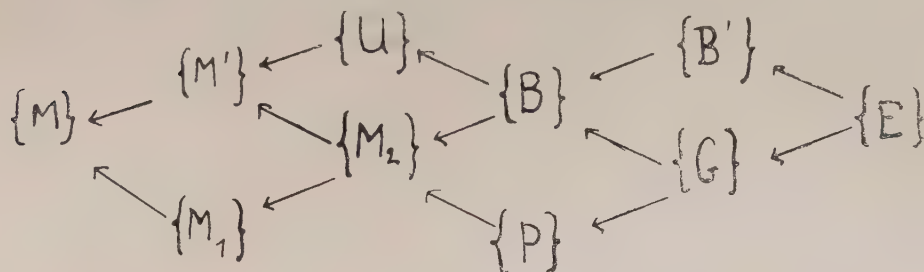


FIG. 23

Notons de plus qu'on a toutes les équivalences logiques telles que les suivantes :

$\{M_1\}$  et  $\{U\} \leftrightarrow \{B\}$ ,  $\{M_2\}$  et  $\{U\} \leftrightarrow \{B\}$

e) Donnons quelques exemples concrets d'hypergroupes partiels inversibles.

1) Soit  $U'$  un sous-groupe partiel d'un groupe partiel  $U = \{\alpha, \beta, \dots\}$ . Les complexes  $U'\alpha U'$  déterminent une partition de  $U$ . On les organise en un hypergroupe partiel  $M$  en posant  $U'\alpha U' \cdot U'\beta U' \ni U'\gamma U'$  si  $\gamma \in U'\alpha U'\beta U'$ . Les unités sont les complexes  $U'\varepsilon U'$  où  $\varepsilon$  est unité de  $U$ , l'inverse (bilatère) de  $U'\alpha U'$  est  $U'\bar{\alpha} U'$ . Cet hypergroupe partiel est inversible. Si  $U$  est un groupoïde de Brandt,  $M$  est un système  $M_1$ . Si  $U$  est un groupe, on retrouve l'hypergroupe inversible, système des catégories.

Si, au lieu d'un groupe partiel, d'un groupoïde de Brandt ou d'un groupe, on utilise un système  $M$ , un système  $M_1$  ou un hypergroupe inversible, les résultats précédents restent valables.

2) Soit  $U = \{\alpha, \beta, \dots\}$  un groupe partiel et  $A$  un groupe d'automorphismes de  $U$ . Disons que deux éléments  $\alpha$  et  $\beta$  de  $U$  sont conjugués s'il existe  $a \in A$  tel que  $\beta = a\alpha$ . Les classes  $\mathcal{Q}, \mathcal{C}, \dots$  de conjugués peuvent être organisées en hypergroupe partiel  $M$  en posant  $\mathcal{Q}\mathcal{C} \ni \mathcal{M}$  s'il existe  $\mu \in \mathcal{M}$ ,  $\alpha \in \mathcal{Q}$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}$ , tels que  $\mu = \alpha\gamma$ . Les unités sont les classes  $\mathcal{E}_i$  formées par les unités de  $U$ ; l'inverse (bilatère) de  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble  $\bar{\mathcal{Q}}$  des éléments inverses des éléments de  $\mathcal{Q}$ . Cet hypergroupe partiel est également inversible. Si  $U$  est un groupoïde de Brandt,  $M$  est un système  $M_1$ . Si  $U$  est un groupe, on retrouve l'hypergroupe inversible connu <sup>(14)</sup>.

Là encore, si on utilise un système  $M$ , un système  $M_1$ , ou un hypergroupe inversible, ces résultats restent valables.

f) *Axiomatique des hypergroupes partiels inversibles :*

1) Voici un système de trois axiomes constitués par sept conditions indépendantes pour la définition d'un hypergroupe partiel inversible.

(14) Les exemples 1) et 2) sont directement inspirés des exemples d'hypergroupes inversibles qu'on trouve dans J. KUNTZMANN [1], p. 167 et 168.

Un hypergroupe partiel inversible  $M$  est un ensemble  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  non vide dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un sous-ensemble non vide de  $M$ , les axiomes suivants étant vérifiés :

(I<sub>a</sub>) a -  $(\alpha\beta) \gamma$  a un sens dès que  $\alpha(\beta\gamma)$  a un sens.

b - Si  $(\alpha\beta) \gamma$  et  $\alpha(\beta\gamma)$  ont un sens, on a  $(\alpha\beta) \gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .

(II<sub>a</sub>)  $M$  possède au moins un sous-ensemble  $U$  avec les propriétés :

a - Si  $\alpha\varepsilon$  a un sens ( $\alpha \in M, \varepsilon \in U$ ),  $\alpha\varepsilon$  contient un seul élément.

b - Si  $\alpha\varepsilon$  a un sens ( $\alpha \in M, \varepsilon \in U$ ), on a  $\alpha\varepsilon \ni \alpha$ .

c - Tout  $\alpha \in M$  est composable avec un  $\varepsilon \in U$  au moins.

(III<sub>a</sub>) Pour tout  $\alpha \in M$ , il existe au moins un  $\bar{\alpha} \in M$  avec les propriétés :

a - Si  $\bar{\alpha}\eta \ni \xi$ ,  $\alpha\xi$  a un sens.

b - Si  $\bar{\alpha}\eta \ni \xi$  et si  $\alpha\xi$  a un sens, on a  $\alpha\xi \ni \eta$ .

Démonstration. — Établissons d'abord qu'un système satisfaisant à ces axiomes est un hypergroupe partiel inversible.

1° Étude d'un élément  $\bar{\alpha}$  associé à  $\alpha$  d'après (III<sub>a</sub>). Unicité.

Désignons d'une façon générale par  $\varepsilon_\alpha$  un élément de  $U$  (que nous appellerons élément unité à droite de  $\alpha$ ) associé à  $\alpha$  d'après (II<sub>a</sub>) c. On a  $\alpha\varepsilon_\alpha = \bar{\alpha}$  d'après (II<sub>a</sub>) a et (II<sub>a</sub>) b. On en déduit  $\alpha\bar{\alpha} \ni \varepsilon_\alpha$ , d'après (III<sub>a</sub>) a et (III<sub>a</sub>) b.

$\bar{\alpha}$  joue le rôle d'un élément inverse à droite pour  $\alpha$ .

Soit  $\bar{\bar{\alpha}}$  un élément associé à  $\bar{\alpha}$  d'après (III<sub>a</sub>). On a  $\bar{\bar{\alpha}}\bar{\alpha} \ni \varepsilon_{\bar{\alpha}}$  par le même raisonnement. On en tire  $\alpha\varepsilon_{\bar{\alpha}} \ni \bar{\bar{\alpha}}$ , d'après (III<sub>a</sub>) a et (III<sub>a</sub>) b. Or, d'après (II<sub>a</sub>) a et (II<sub>a</sub>) b, on a  $\alpha\varepsilon_{\bar{\alpha}} = \alpha$ . On en déduit  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$  et  $\bar{\alpha}\bar{\alpha} \ni \varepsilon_\alpha$  (1).

$\bar{\alpha}$  joue le rôle d'un élément inverse à gauche pour  $\alpha$ .

Montrons qu'il n'y a aucun élément  $\beta$  autre que  $\bar{\alpha}$  qui satisfasse à  $\alpha\beta \ni \varepsilon$  ou à  $\beta\alpha \ni \varepsilon$  ( $\varepsilon$  étant un élément quelconque de  $U$ ). En effet, on peut écrire  $\alpha\beta = \bar{\alpha}\beta \ni \varepsilon \rightarrow \bar{\alpha}\varepsilon \ni \beta$  (d'après (III<sub>a</sub>) a et (III<sub>a</sub>) b)  $\rightarrow \bar{\alpha} = \beta$  (d'après (II<sub>a</sub>) a et (II<sub>a</sub>) b). De la même façon, on a  $\beta\alpha = \bar{\beta}\alpha \ni \varepsilon \rightarrow \bar{\beta}\varepsilon \ni \alpha \rightarrow \bar{\beta} = \alpha$ ; mais d'après (1), on a aussi  $\bar{\beta}\beta \ni \varepsilon_\beta$  soit  $\alpha\beta \ni \varepsilon_\beta$ ; on est ramené au cas précédent et on en conclut  $\bar{\alpha} = \beta$ .

En particulier, l'élément  $\alpha$  satisfaisant à (III<sub>a</sub>) a et à (III<sub>a</sub>) b est unique.

2° Propriétés relatives à ces éléments inverses tels que  $\bar{\alpha}$ .

(III<sub>a</sub>) a et (III<sub>a</sub>) b expriment la propriété :  $\bar{\alpha}\eta \ni \xi \rightarrow \alpha\xi \ni \eta$ .

Montrons que l'implication réciproque est également valable. On a  $\alpha\varepsilon \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\xi \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\eta \ni \xi$ , d'après la propriété directe. On a donc  $\alpha\xi \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\eta \ni \xi$  (2).

Il en résulte l'implication suivante :  $\xi\eta \ni \mu \rightarrow \eta\xi \ni \mu$  (3).

En effet, d'après (2), on a  $\xi \eta \supset \mu \rightarrow \bar{\xi} \mu \supset \eta$ . Or, d'après (1), on a  $\bar{\eta} \eta \supset \varepsilon$ . Il en résulte que  $\eta (\bar{\xi} \mu)$  a un sens, et, d'après (I<sub>d</sub>) a, que  $(\eta \bar{\xi}) \mu$  a un sens. De plus, d'après (I<sub>d</sub>) b, on a  $(\eta \bar{\xi}) \mu \supset \varepsilon$ . Or, la seule solution de  $\beta \mu \supset \varepsilon$  est  $\beta = \bar{\mu}$ . D'où, nécessairement,  $\eta \bar{\xi} \supset \bar{\mu}$ .

On déduit encore la propriété :  $\xi \alpha \supset \eta \leftrightarrow \eta \bar{\alpha} \supset \bar{\xi}$  (4).

En effet, on a  $\xi \alpha \supset \eta \rightarrow \bar{\alpha} \bar{\xi} \supset \eta$ . Mais, d'après (1), on a  $\eta \bar{\eta} \supset \varepsilon$ . Donc,  $\eta (\bar{\alpha} \bar{\xi})$  a un sens et il en est de même de  $(\eta \bar{\alpha}) \bar{\xi}$  avec  $(\eta \bar{\alpha}) \bar{\xi} \supset \varepsilon$ , d'après (I<sub>d</sub>) a et (I<sub>d</sub>) b. De là, on déduit, comme ci-dessus,  $\eta \bar{\alpha} \supset \bar{\xi}$  car  $\bar{\xi} = \bar{\bar{\xi}}$  est l'inverse de  $\bar{\xi}$ . Enfin, on peut écrire  $\eta \bar{\alpha} \supset \bar{\xi} \rightarrow \bar{\xi} \bar{\alpha} \supset \eta$  soit  $\xi \alpha \supset \eta$ .

3° *Associativité* : Pour compléter (I<sub>d</sub>) a, montrons que  $\alpha (\beta \gamma)$  a un sens dès que  $(\alpha \beta) \gamma$  a un sens.

Supposons que  $(\alpha \beta) \gamma$  ait un sens, c'est-à-dire qu'il existe un élément  $\xi$  et un élément  $\eta$  tels que  $\alpha \beta \supset \xi$  et  $\xi \gamma \supset \eta$ . On a, d'après (3),  $\bar{\eta} \in \bar{\gamma} \bar{\xi}$ ,  $\bar{\xi} \in \bar{\beta} \bar{\alpha}$ , d'où l'on déduit que  $\bar{\gamma} (\bar{\beta} \bar{\alpha})$  a un sens et que  $(\bar{\gamma} \bar{\beta}) \bar{\alpha}$  a un sens d'après (I<sub>d</sub>) a. Il existe donc un élément  $\mu$  et un élément  $\nu$  tels que  $\bar{\gamma} \bar{\beta} \supset \mu$  et  $\mu \bar{\alpha} \supset \nu$ . Toujours d'après (3) et puisque  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  sont les inverses de  $\alpha, \beta, \gamma$ , on a  $\bar{\mu} \in \beta \gamma$  et  $\bar{\nu} \in \alpha \mu$ , ce qui montre que  $\alpha (\beta \gamma)$  a un sens.

4° *Propriétés des éléments de U*.

Pour tout élément  $\varepsilon \in U$ , il existe au moins un élément  $\alpha \in M$  tel que  $\alpha \varepsilon$  ait un sens. Soit  $\varepsilon \in U$  tel qu'il n'existe aucun élément  $\alpha \in M$  tel que  $\alpha \varepsilon$  ait un sens. Soit  $\bar{\varepsilon}$  son inverse.  $\bar{\varepsilon}$  est composable avec un élément  $\varepsilon' \in U$ , et on a  $\bar{\varepsilon} \varepsilon' = \bar{\varepsilon}$  d'après (II<sub>d</sub>). On a  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \varepsilon' = (\bar{\varepsilon} \varepsilon') \varepsilon'$ . Donc,  $(\bar{\varepsilon} \varepsilon') \varepsilon'$  a un sens et, d'après 3°),  $\varepsilon' \varepsilon'$  a un sens. D'après (II<sub>d</sub>) a et (II<sub>d</sub>) b, on a  $\varepsilon' \varepsilon' = \varepsilon'$ . De  $\bar{\varepsilon} \varepsilon' = \bar{\varepsilon}$ , on déduit, d'après (III<sub>d</sub>) a et (III<sub>d</sub>) b,  $\varepsilon \varepsilon \supset \varepsilon'$ . Il en résulte  $\varepsilon' (\varepsilon \varepsilon) \supset \varepsilon' \varepsilon' = \varepsilon'$ . Donc  $\varepsilon' (\varepsilon \varepsilon)$  a un sens et finalement, d'après (I<sub>d</sub>) a,  $\varepsilon' \varepsilon$  a un sens contrairement à notre supposition initiale.

Pour tout élément  $\varepsilon \in U$ , on a  $\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$  (5). Pour tout  $\varepsilon \in U$ , il existe  $\alpha \in M$  tel que  $\alpha \varepsilon$  ait un sens d'après 4°. On a  $\alpha \varepsilon = \alpha$  d'après (II<sub>d</sub>) a et (II<sub>d</sub>) b. D'où  $\alpha = \alpha \varepsilon = (\alpha \varepsilon) \varepsilon$  ce qui montre que  $(\alpha \varepsilon) \varepsilon$  a un sens et, par conséquent, d'après 3°,  $\varepsilon \varepsilon$  a un sens. Finalement,  $\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$ , d'après (II<sub>d</sub>) a et (II<sub>d</sub>) b.

Pour tout  $\alpha \in M$ , l'unité à droite  $\varepsilon_\alpha$  est unique. Supposons qu'on ait  $\alpha \varepsilon = \alpha$  et  $\alpha \varepsilon' = \alpha$  (avec  $\varepsilon, \varepsilon' \in U$ ); on en déduit  $(\alpha \varepsilon) \varepsilon' = \alpha$ ; donc,  $\varepsilon \varepsilon'$  a un sens et  $\varepsilon \varepsilon' = \varepsilon$ . Or, on a  $\varepsilon \varepsilon' = \varepsilon$ . Ces deux égalités contredisent l'unicité de l'inverse de  $\varepsilon$ .

5° *Existence et unicité des éléments unités à gauche*.

De  $\bar{\alpha} \bar{\alpha} \supset \varepsilon_\alpha$ , on déduit  $\varepsilon_\alpha \bar{\alpha} \supset \alpha$ , d'après (4). Supposons que  $\varepsilon_\alpha \bar{\alpha}$  contienne plus d'un élément :  $\varepsilon_\alpha \bar{\alpha} = \{\alpha, \beta, \dots\}$  avec  $\beta \neq \alpha$ . Si  $\alpha \beta$  a un sens, il ne

contient pas d'élément de  $U$  car  $\beta$ , inverse de  $\bar{\beta}$ , est différent de  $\alpha$ . Or,  $(\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha)\bar{\beta}$  a un sens car  $\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha \ni \beta$  et  $\bar{\beta}\bar{\beta} \ni \varepsilon_{\beta}^{-}$ . Donc,  $\bar{\alpha}\bar{\beta}$  a effectivement un sens. De plus,  $(\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha)\bar{\beta} = \varepsilon_{\alpha}^{-}(\alpha\bar{\beta})$ . Mais,  $(\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha)\bar{\beta} \ni \varepsilon_{\beta}^{-}$ . Par contre,  $\varepsilon_{\alpha}^{-}(\alpha\bar{\beta})$  ne contient aucun élément de  $U$  : en effet,  $\varepsilon_{\alpha}^{-}\varepsilon_{\alpha}^{-} = \varepsilon_{\alpha}^{-}$  (d'après (5)) entraîne  $\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{-} = \varepsilon_{\alpha}^{-}$  et  $\varepsilon_{\alpha}^{-}\xi$  ne contient aucun élément de  $U$  si l'on a  $\xi \neq \varepsilon_{\alpha}^{-}$  ; puisque  $\bar{\alpha}\bar{\beta}$  ne contient pas  $\varepsilon_{\alpha}^{-}$  (pas plus que n'importe quel élément de  $U$ ),  $\varepsilon_{\alpha}^{-}(\alpha\bar{\beta})$  ne contient pas  $\varepsilon_{\beta}^{-}$ . Il y a contradiction et on a  $\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha = \alpha$  (6).

De plus, le seul élément de  $U$  composable avec  $\alpha$  est  $\varepsilon_{\alpha}^{-}$  : en effet, si  $\varepsilon\alpha$  a un sens,  $\varepsilon(\varepsilon_{\alpha}^{-}\alpha)$  a un sens, ainsi que  $\varepsilon\varepsilon_{\alpha}^{-}$ . Mais,  $\varepsilon$  n'est composable qu'avec  $\varepsilon \in U$ . Donc, on a  $\varepsilon_{\alpha}^{-} = \varepsilon$ .

L'ensemble  $U$  vérifie donc les propriétés symétriques de  $(II_a)a$ ,  $(II_a)b$ ,  $(II_a)c$ .

On a bien retrouvé toutes les conditions définissant l'hypergroupe partiel inversible.

Nous montrons maintenant que les sept conditions utilisées sont indépendantes :

Les exemples suivant vérifient toutes les conditions précédentes sauf une et ne sont pas des hypergroupes partiels inversibles.

$$(E1) \quad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & . \\ a & a & e \end{array}$$

$$(E2) \quad \begin{array}{c|ccc} & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & e & b \\ b & b & a & e \end{array}$$

$$(E3) \quad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & \{e, a\} & \{e, a\} \\ a & \{e, a\} & \{e, a\} \end{array}$$

$$(E4) \quad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & e & a \end{array}$$

$$(E5) \quad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & . \\ a & . & . \end{array}$$

$$(E6) \quad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & . \\ a & a & . \end{array}$$

1° (E1) ne vérifie pas  $(I_a)a$  car  $a(aa)$  est défini alors que  $(aa)a$  ne l'est pas. Il vérifie  $(I_a)b$ . Il vérifie  $(II_a)$  lorsqu'on prend  $U = \{e\}$  et  $(III_a)$  lorsqu'on prend  $\bar{e} = e$ ,  $\bar{a} = a$ .

2° (E2) vérifie  $(I_a)a$  mais non  $(I_a)b$  car on a  $a(bb) = a \neq e = (ab)b$ . Il vérifie  $(II_a)$  en prenant  $U = \{e\}$  et  $III_a$  en prenant  $\bar{e} = e$ ,  $\bar{a} = a$ ,  $b = b$ .

3° (E3) vérifie  $(I_a)$ . Il vérifie  $(II_a)b$  et  $(II_a)c$  en prenant  $U = \{e\}$  mais il ne vérifie pas alors  $(II_a)a$ . Il vérifie  $(III_a)$  en prenant  $\bar{e} = e$ ,  $\bar{a} = a$ . Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible car il ne possède pas d'éléments scalaires, donc pas d'unités scalaires.

4° (E4) vérifie  $(I_a)$ . Il vérifie  $(II_a)a$  et  $(II_a)c$  en prenant  $U = \{e\}$  mais il ne vérifie pas  $(II_a)b$  car on n'a pas  $ae \ni a$ . Il vérifie  $(III_a)$  en prenant  $\bar{e} = e$ ,  $\bar{a} = a$ . Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible car ni  $e$  ni  $a$  ne peuvent être éléments unités.

5° (E 5) vérifie (I<sub>a</sub>). Il vérifie (II<sub>a</sub>)*a* et (II<sub>a</sub>)*b* si on prend  $U = \{e\}$ , mais il ne vérifie pas (II<sub>a</sub>)*c* car *a* n'est pas composable. Il vérifie (III<sub>a</sub>) si on prend  $\bar{e} = e, \bar{a} = a$ .

6° (E 6) vérifie (I<sub>a</sub>) et (II<sub>a</sub>) en prenant  $U = \{e\}$ . Si on prend  $\bar{e} = e, \bar{a} = a$ , il vérifie (III<sub>a</sub>)*b* mais non (III<sub>a</sub>)*a* puisque  $\bar{a}e = ae \ni a$  et *aa* n'a pas de sens. Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible : en effet, *aa* n'a pas de sens, donc *a* ne peut être élément unité; on a nécessairement  $U = \{e\}$  si l'on veut organiser (E 6) en hypergroupe partiel inversible; mais alors, *a* ne peut avoir d'inverse.

7° En considérant toujours (E 6) avec  $U = \{e\}$  mais en prenant  $\bar{e} = \bar{a} = e$ , on satisfait à (III<sub>a</sub>)*a* mais non à (III<sub>a</sub>)*b* puisqu'on a  $\bar{a}e = ee \ni e$  et qu'on n'a pas  $ae \ni e$  <sup>(15)</sup>.

2) On déduit de là un système de trois axiomes constitués par quatre conditions indépendantes pour la définition d'un hypergroupe inversible <sup>(16)</sup>.

*Un hypergroupe inversible P est un ensemble  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  dans lequel est définie (partout) une opération non nécessairement uniforme, les axiomes suivants étant vérifiés :*

(I)  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .

(II<sub>a</sub>) *Il existe dans P au moins un élément  $\varepsilon$  avec les propriétés :*

*a — Pour tout  $\alpha \in P$ ,  $\alpha\varepsilon$  contient un seul élément.*

*b — Pour tout  $\alpha \in P$ , on a  $\alpha\varepsilon \ni \alpha$ .*

(III<sub>a</sub>) *Pour tout  $\alpha \in P$ , il existe au moins un  $\bar{\alpha} \in P$  avec la propriété :*

$\bar{\alpha}\eta \ni \xi$  entraîne  $\alpha\xi \ni \eta$ .

*Démonstration.* — Ces axiomes définissent bien un hypergroupe inversible. En effet, l'opération étant partout définie, les axiomes du 1) sont satisfaits. *P* est donc un hypergroupe partiel inversible et, par conséquent, un hypergroupe inversible.

Les quatre conditions imposées sont indépendantes comme le montrent les exemples (E 2), (E 3), (E 4) et l'exemple suivant :

|               | <i>e</i> | <i>a</i>      | <i>b</i>      |
|---------------|----------|---------------|---------------|
| (E7) <i>e</i> | <i>e</i> | <i>a</i>      | <i>b</i>      |
| <i>a</i>      | <i>a</i> | <i>a</i>      | $\{e, a, b\}$ |
| <i>b</i>      | <i>b</i> | $\{e, a, b\}$ | $\{a, b\}$    |

(E 7) vérifie (I) et (II<sub>a</sub>) avec  $\varepsilon = e$ , mais il ne vérifie pas (III<sub>a</sub>) : en effet, on ne peut prendre ni  $\bar{a} = e$  car on a  $ee \ni e$  et on n'a pas  $ae \ni e$ , ni  $\bar{a} = a$  car on a  $ab \ni e$  et on n'a pas  $ae \ni b$ , ni  $\bar{a} = b$  car on a  $bb \ni a$  et on n'a pas  $aa \ni b$  <sup>(15)</sup>.

3) On déduit aussi un système de trois axiomes constitués par six

(15) Un autre contre-exemple (du même type) est fourni par le multigroupe des classes  $aH$  dans un groupe *G* par rapport à un sous-groupe *H* non invariant.

(16) On trouvera un autre système d'axiomes dans J. KUNTZMANN [1], p. 192.

conditions indépendantes pour la définition d'un groupe partiel <sup>(17)</sup>.

*Un groupe partiel C est un ensemble  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un élément de C, les axiomes suivants étant vérifiés :*

(I<sub>a</sub>) a —  $(\alpha\beta)\gamma$  a un sens dès que  $\alpha(\beta\gamma)$  a un sens.

b — Si  $(\alpha\beta)\gamma$  et  $\alpha(\beta\gamma)$  ont un sens, on a  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .

(II<sub>a</sub>) C possède au moins un sous-ensemble U avec les propriétés :

a — Si  $\alpha\varepsilon$  a un sens ( $\alpha \in C, \varepsilon \in U$ ), on a  $\alpha\varepsilon = \alpha$ .

b — Tout  $\alpha \in C$  est composable avec un  $\varepsilon \in U$  au moins.

(III<sub>a</sub>) Pour tout  $\alpha \in C$ , il existe au moins un  $\bar{\alpha} \in C$  avec les propriétés :

a — Si  $\bar{\alpha}\eta = \xi$ ,  $\alpha\xi$  a un sens.

b — Si  $\bar{\alpha}\eta = \xi$  et si  $\alpha\xi$  a un sens, on a  $\alpha\xi = \eta$ .

*Démonstration.* — Ces axiomes définissent bien un groupe partiel. En effet, les axiomes du 1) sont satisfaits. C'est donc un hypergroupe partiel inversible, donc un groupe partiel.

Les six conditions imposées sont indépendantes comme le montrent les exemples (E1), (E2), (E4), (E5) et (E6) (ce dernier pris deux fois, comme plus haut).

## 2. TREILLIS DES SOUS-HYPERGROUPES PARTIELS D'UN HYPERGROUPE INVERSIBLE.

Envisageons le treillis T des sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible M (ces sous-hypergroupes partiels sont évidemment inversibles).

a) Dans ce treillis, l'intersection  $A \wedge B$  de deux éléments A et B est l'ensemble des éléments de M communs à A et B (c'est un sous-hypergroupe partiel), la réunion  $A \vee B$  est le sous-hypergroupe partiel engendré par les éléments de A et les éléments de B (on voit immédiatement que  $A \vee B$  est l'ensemble des éléments de M appartenant aux produits d'un nombre fini d'éléments de A et B). T est un treillis complet car on peut y définir l'intersection d'un nombre quelconque d'éléments et il existe un élément universel, M. L'élément zéro est U.

A et B étant deux sous-hypergroupes partiels de M, nous désignerons par AB l'ensemble, en général différent de  $A \vee B$ , des éléments de M qui appartiennent à un produit  $\alpha\beta$  ou  $\alpha \in A$  et  $\beta \in B$ ; de même, nous désignerons par ABC l'ensemble des éléments de M qui appartiennent à un produit  $\alpha\beta\gamma$  ou  $\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in C$  (les ensembles tels que AB, ABC ne sont pas en général des éléments du treillis T). A et B sont dits *permutables* si  $AB = BA$  (en utilisant les propriétés des éléments inverses, on voit aussitôt qu'il suffit d'avoir pour cela  $AB \subset BA$  par exemple). A est dit *presque permutable avec B* si  $BAB \subset ABA$ . A et B sont dits *presque permutables* si  $BAB = ABA$ . Si A et B sont permutables, on a  $A \vee B = AB$ .

(17) On trouvera un autre système d'axiomes dans une note aux *Comptes rendus*, t. 226, 1948, p. 616.

Si  $A$  est presque permutable avec  $B$ , on a  $A \vee B = ABA$ . Remarquons encore que tout sous-hypergroupe partiel contenant  $U$ , l'on a  $A \subset AB$ ,  $B \subset AB$ ,  $A \subset ABA$ ,  $B \subset ABA$ .

Considérons, dans le treillis  $T$ , deux chaînes de longueur finie, de mêmes extrémités :

$$\begin{aligned} \{A_i\} & \quad A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_\alpha. \\ \{B_j\} & \quad B_0 = A_0 \geq B_1 \geq B_2 \geq \dots \geq B_\beta = A_\alpha. \end{aligned}$$

Nous allons leur appliquer les résultats du chapitre IV.

Construisons les intercalaires de Zassenhaus  $A_{ij}$  et  $B_{ji}$  et les subdivisions :

$$\begin{aligned} \{A_{ij}\} \quad A_{10} = A_0 \geq A_{11} \geq A_{12} \geq \dots \geq A_{1\beta} = A_{20} = A_1 \geq A_{21} \geq \dots \geq A_{2\beta} = A_{30} = A_2 \\ \geq \dots \geq A_{\alpha\beta} = A_\alpha, \\ \{B_{ji}\} \quad B_{10} = B_0 \geq B_{11} \geq B_{12} \geq \dots \geq B_{1\alpha} = B_{20} = B_1 \geq B_{21} \geq \dots \geq B_{2\alpha} = B_{30} = B_2 \\ \geq \dots \geq B_{\beta\alpha} = B_\beta. \end{aligned}$$

b) LEMME 1. — L'égalité

$$A_{ij} \wedge B_{j-1} = B_{ji} \wedge A_{i-1} \quad (I')$$

a lieu si les conditions

$$A_{i,j-1} \wedge B_j \text{ est presque permutable avec } A_i$$

$$B_{j-1} \wedge A_i \text{ est presque permutable avec } B_j \quad (II')$$

sont remplies.

*Démonstration* : En effet, si  $\xi \in A_{ij} \wedge B_{j-1} = [A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_j)] \wedge B_{j-1}$ , on a  $\xi \in B_{j-1}$  et, d'après (II'), il existe  $\alpha, \beta, \beta'$  tels que  $\xi \in \beta \alpha \beta'$  avec  $\alpha \in A_i$ ,  $\beta \in A_{i-1} \wedge B_j$ ,  $\beta' \in A_{i-1} \wedge B_j$ . Parmi les quatre éléments  $\xi, \alpha, \beta, \beta'$  tels que  $\xi \in \beta \alpha \beta'$  les trois éléments  $\xi, \beta, \beta'$  appartiennent à  $B_{j-1}$ . On en déduit aisément que le quatrième  $\alpha$  appartient aussi à  $B_{j-1}$  car un sous-hypergroupe partiel est unitaire<sup>(18)</sup> en raison de l'existence et de la propriété des éléments inverses. Il résulte de là  $\xi \in B_j \vee (B_{j-1} \wedge A_i)$ . D'autre part, on a manifestement  $\xi \in A_{i-1}$ . D'où  $\xi \in [B_j \vee (B_{j-1} \wedge A_i)] \wedge A_{i-1}$ , et  $A_{ij} \wedge B_{j-1} \in B_{ji} \wedge A_{i-1}$ .

L'inclusion réciproque s'établit de la même manière.

**THÉORÈME 5.** — Si les conditions (II') ont lieu quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ), les subdivisions  $\{A_{ij}\}$  et  $\{B_{ji}\}$  des chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  simplifiées par suppression des répétitions ont même longueur.

*Démonstration* : C'est une conséquence immédiate du théorème 1, chapitre IV.

Pour obtenir maintenant un analogue du théorème 2, il faut d'abord renforcer le lemme 3 :

**LEMME 2.** — Soit  $m$  l'indice courant des éléments de la chaîne  $\{A_{ij}\}$  ( $0 \leq m \leq \alpha\beta$ ). Si les conditions (II') ont lieu pour tout couple  $(i, j)$  ( $i = 1, \dots, \alpha$ ;  $j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$ , elles ont lieu

(18) C'est-à-dire que, si l'on a  $\alpha \in \beta \gamma$  et si, par exemple,  $\alpha$  et  $\gamma$  appartiennent à un sous-hypergroupe partiel,  $\beta$  lui appartient également. En effet,  $\alpha \in \beta \gamma \rightarrow \beta \in \alpha \gamma$  et  $\gamma$  appartient au sous-hypergroupe partiel en même temps que  $\gamma$ .

pour tout couple  $(m, j)$  ( $m = 1, \dots, \alpha\beta$ ;  $j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$ .

*Démonstration* : 1) Montrons que  $A_{ij-1} \wedge B_q$  est presque permutable avec  $A_{ij}$  ( $i = 1, \dots, \alpha$ ;  $j, q = 1, \dots, \beta$ ).

*1<sup>er</sup> cas* :  $q \leq j-1$ . On a alors (lemme 2, chapitre IV)  $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q) = A_{ij-1} = A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_{j-1})$ . D'après la première des conditions (II') appliquée à  $i$  et  $j-1 \geq q \geq 1$ , ceci a pour valeur  $(A_{i-1} \wedge B_{j-1}) \cdot A_i \cdot (A_{i-1} \wedge B_{j-1})$ . Or, d'une part, on a  $A_i \subset A_{ij}$ ; d'autre part, on a  $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_{j-1}) = A_{ij-1}$  et  $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset B_{j-1} \subset B_q$  d'où  $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset A_{ij-1} \wedge B_q$ . Il en résulte que l'on a  $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q) \subset (A_{ij-1} \wedge B_q) \cdot A_{ij} \cdot (A_{ij-1} \wedge B_q)$ . En particulier  $A_{ij} \cdot (A_{ij-1} \wedge B_q) \cdot A_{ij} \subset (A_{ij-1} \wedge B_q) \cdot A_{ij} \cdot (A_{ij-1} \wedge B_q)$ .

*2<sup>me</sup> cas* :  $q \geq j$ . On a alors (lemme 2, chapitre IV)  $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q) = A_{ij}$ . Il en résulte immédiatement

$$A_{ij} \cdot (A_{ij} \wedge B_q) \cdot A_{ij} \subset A_{ij} \subset (A_{ij-1} \wedge B_q) \cdot A_{ij} \cdot (A_{ij-1} \wedge B_q).$$

2) Montrons que  $B_{q-1} \wedge A_{ij}$  est presque permutable avec  $A_{ij-1}$  ( $i = 1, \dots, \alpha$ ;  $j, q = 1, \dots, \beta$ ).

*1<sup>er</sup> cas* :  $j \leq q-1$ . On a (lemme 2, chapitre IV)  $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) = B_{q-1} = B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{i-1})$ . D'après la deuxième des conditions (II') appliquée à  $q \geq j+1 > 1$  et  $i-1$  (si  $i-1$  est égal à 0, l'égalité est triviale car les deux membres sont  $B_{q-1}$ ), ceci a pour valeur  $(B_{q-1} \wedge A_{i-1}) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{i-1})$ . Or, en utilisant un calcul fait au lemme 2, chapitre IV, partie a), 2) de la démonstration, on a  $B_{q-1} \wedge A_{i-1} = B_{q-1} \wedge A_{iq-1} \subset B_{q-1} \wedge A_{ij}$ . Il en résulte  $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij})$ . En particulier,  $B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij})$ .

*2<sup>me</sup> cas* :  $j \geq q$ . On a (lemme 2, chapitre IV)  $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) = B_{q-1} = B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_i)$ . D'après la deuxième des conditions (II') appliquée à  $q$  et  $i$ , ceci a pour valeur  $(B_{q-1} \wedge A_i) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_i)$ . Or, on a  $B_{q-1} \wedge A_i \subset B_{q-1} \wedge A_{ij}$ . On en déduit  $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij})$  et en particulier  $B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \cdot B_q \cdot (B_{q-1} \wedge A_{ij})$ .

En utilisant le lemme 2 du chapitre IV, et ce lemme 2, on voit que le lemme 5 et le théorème 2 du chapitre IV restent valables. Ce dernier théorème devient :

**THÉORÈME 6.** — *Si les conditions (II') sont satisfaites quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (II'), elles ont même longueur.*

Le théorème 3 du chapitre IV est valable directement :

**THÉORÈME 7.** — *Si les conditions (II') sont satisfaites quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales dans le treillis  $T$  (ou dans un sous-treillis), elles ont même longueur.*

c) LEMME 3. — L'égalité

$$A_{i,j} \wedge B_{j-1} = B_{j,i} \wedge A_{i-1} \quad (I')$$

a lieu si les conditions

$A_{i-1} \wedge B_j$  et  $A_i$  sont presque permutables

$B_{j-1} \wedge A_i$  et  $B_j$  sont presque permutables (III')

sont remplies.

Il suffit de remarquer que ces conditions sont plus fortes que les conditions (II').

LEMME 4. — Si les conditions (III') ont lieu pour tout couple  $(i, j)$  ( $i = 1, \dots, \alpha; j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$ , elles ont lieu pour tout couple  $(m, j)$  ( $m = 1, \dots, \alpha\beta; j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_{i,j}\}$  et  $\{B_j\}$ .

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme 2.

THÉORÈME 8. — Si les conditions (III') sont satisfaites quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha, 0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (III'), elles ont même longueur.

d) LEMME 5. — L'égalité (I') est encore valable si les conditions

$A_i$  et  $A_{i-1} \wedge B_j$  sont permutables

$B_j$  et  $B_{j-1} \wedge A_i$  sont permutables (IV')

sont remplies.

Il suffit encore de remarquer que ces conditions renforcent les conditions (III').

LEMME 6. — Si les conditions (IV') ont lieu pour tout couple  $(i, j)$  ( $i = 1, \dots, \alpha; j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$ , elles ont lieu pour tout couple  $(m, j)$  ( $m = 1, \dots, \alpha\beta; j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_{i,j}\}$  et  $\{B_j\}$ .

La démonstration est encore analogue à celle du lemme 2.

THÉORÈME 9. — Si les conditions (IV') sont satisfaites quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha, 0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (IV'), elles ont même longueur.

e) LEMME 7. — L'égalité (I') est encore valable si la condition

$A_i$  et  $B_j$  sont permutables (V')

est remplie.

Démonstration : En effet, on a alors  $A_{i,j} = A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_j) = A_i \cdot (A_{i-1} \wedge B_j)$  car tout élément  $\xi$  de  $A_{i,j} \subset A_i \vee B_j$  est tel que  $\xi \in \alpha\beta$  où  $\alpha \in A_i$  et  $\beta \in B_j$ ; et, de  $\xi \in A_{i-1}$ , on déduit  $\beta \in A_{i-1}$ . De plus,  $A_i \cdot (A_{i-1} \wedge B_j) \wedge B_{j-1}$

$= (A_i \wedge B_{j-1}) \cdot (A_{i-1} \wedge B_j)$  car tout élément  $\eta$  de  $A_i \cdot (A_{i-1} \wedge B_j) \wedge B_{j-1}$  est tel que  $\eta \in \alpha\beta$  où  $\alpha \in A_i$  et  $\beta \in A_{i-1} \wedge B_j$ ; et de  $\eta \in B_{j-1}$ , on déduit  $\alpha \in B_{j-1}$ . De là, (I') résulte facilement <sup>(19)</sup>.

LEMME 8. — *Si les conditions (V') ont lieu pour tout couple  $(i, j)$  ( $i = 1, \dots, \alpha$ ;  $j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$ , elles ont lieu pour tout couple  $(m, j)$  ( $m = 1, \dots, \alpha\beta$ ;  $j = 1, \dots, \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_{ij}\}$  et  $\{B_j\}$ .*

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, on distingue les cas  $q \leq j$  et  $q > j$ . Si  $q \leq j$ , on a  $B_q \supset B_j$  d'où  $B_q \supset B_j \wedge A_{i-1}$  et  $B_q$  est permutable avec  $B_j \wedge A_{i-1}$ .  $B_q$  étant permutable avec  $A_i$ , on en déduit qu'il est permutable avec  $A_{ij} = A_i \vee (B_j \wedge A_{i-1})$ . Si  $q > j$ , on a  $B_q \subset B_j$ . Du fait que  $B_q$  est permutable avec  $A_{i-1}$ , on déduit que  $B_q$  est encore permutable avec  $B_j \wedge A_{i-1}$ , donc encore avec  $A_{ij}$  <sup>(20)</sup>.

THÉORÈME 10. — *Si les conditions (V') sont satisfaites quels que soient  $i$  et  $j$  ( $0 < i \leq \alpha$ ,  $0 < j \leq \beta$ ) dans les chaînes  $\{A_i\}$  et  $\{B_j\}$  et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (V'), elles ont même longueur.*

### 3. CAS PARTICULIERS.

a) Puisqu'un hypergroupe inversible est un hypergroupe partiel inversible, les théorèmes 5 à 10 sont valables dans le treillis des sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversible.

b) Puisqu'un groupe partiel est un hypergroupe partiel inversible, les théorèmes 5 à 10 sont valables dans le treillis des sous-groupes partiels d'un groupe partiel.

c) En particulier, ces théorèmes sont valables pour deux chaînes de sous-groupes d'un groupe <sup>(21)</sup>.

d) Moyennant une interprétation très simple des relations d'équivalence, ces théorèmes fournissent des résultats intéressants concernant les chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.

Soient un ensemble  $E = \{x, y, z, \dots\}$  et une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $E$ . Considérons la partie  $C_{\mathcal{R}}$  de l'ensemble  $E \times E$  définie par la rela-

(19) On peut aussi remarquer que la condition (V') est plus forte que les conditions (IV'). On voit qu'on ne peut pas affaiblir la condition (V') en la remplaçant par la condition :  $A_i$  et  $B_j$  sont presque permutables.

On peut utiliser, au lieu des égalités (I'), les égalités duales (I). On obtient le dual du théorème 5 avec les conditions (V'). De plus, on voit que les égalités (I) ont lieu aussi si  $A_i$  et  $B_j$  sont presque permutables ce qui conduit à un résultat plus fort avec ces conditions et à un résultat analogue au théorème 7. Le dual du lemme 8 ne s'étendant pas avec cette dernière condition, le théorème 10 ne s'étend pas.

(20) Cette démonstration se déduit aisément de celle donnée par O. ORE [1], p. 167, dans le cas des groupes.

(21) Les théorèmes 9 et 10 et les cas particuliers correspondants des théorèmes 5 et 7 pour les groupes figurent dans O. ORE [1], pp. 166 à 168.

tion  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire telle que  $(x, y) \in C\mathcal{R}$  si  $x \equiv y (\mathcal{R})$ . On sait que la loi de composition partielle  $(x, y) \cdot (z, t) = (x, t)$  si  $y = z$  fait de  $E \times E$  un groupe partiel <sup>(22)</sup>. D'autre part, la partie  $C\mathcal{R}$  constitue un sous-groupe partiel de  $E \times E$ . Réciproquement, tout sous-groupe partiel de  $E \times E$  définit une relation d'équivalence sur  $E$  <sup>(23)</sup>. En effet, il contient tous les éléments de la forme  $(x, x)$ , il contient  $(x, z)$  dès qu'il contient  $(x, y)$  et  $(y, z)$ , il contient  $(x, y)$  s'il contient  $(y, x)$ , d'où la réflexivité, la transitivité et la symétrie de la relation  $\mathcal{R}$  correspondante.

La correspondance biunivoque ainsi définie entre les relations d'équivalence sur  $E$  et les sous-groupes partiels de  $E \times E$  respecte l'inclusion :  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \leftrightarrow C\mathcal{R} \subset C\mathcal{R}'$ . Elle réalise donc un isomorphisme du treillis des relations d'équivalence sur  $E$  et du treillis des sous-groupes partiels de  $E \times E$  (muni de la loi de composition envisagée). Toute propriété de l'un des treillis se traduit par une propriété de l'autre.

Il résulte de là qu'à l'intersection (à l'union) de deux relations d'équivalence correspond l'intersection (l'union) des sous-groupes partiels correspondants. D'autre part, à la notion d'associabilité <sup>(24)</sup> des relations d'équivalence, correspond celle de permutabilité des sous-groupes partiels. De même, je dis que l'équivalence  $\mathcal{R}$  est presque associable à l'équivalence  $\mathcal{R}'$  si l'existence de  $x, y, z, t$  tels que  $x \equiv y (\mathcal{R}')$ ,  $y \equiv z (\mathcal{R})$ ,  $z \equiv t (\mathcal{R}')$  implique l'existence de  $u, v$  tels que  $x \equiv u (\mathcal{R})$ ,  $u \equiv v (\mathcal{R}')$ ,  $v \equiv t (\mathcal{R})$  <sup>(25)</sup> et je dis que les équivalences  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont presque associables si, de plus,  $\mathcal{R}'$  est presque associable à  $\mathcal{R}$ ; ces notions correspondent alors aux faits que le sous-groupe partiel  $C\mathcal{R}$  est presque permutable avec le sous-groupe partiel  $C\mathcal{R}'$  et que  $C\mathcal{R}$  et  $C\mathcal{R}'$  sont presque permutables.

Les théorèmes 5 à 10 <sup>(26)</sup> sont alors valables dans le treillis des relations d'équivalence  $\mathcal{Q}, \mathcal{B}, \dots$  sur un ensemble; les conditions (II'), (III'), (IV'), (V') se traduisent par les suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_i \text{ est presque associable à } \mathcal{Q}_i \\ & \mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{Q}_i \text{ est presque associable à } \mathcal{B}_j \end{aligned} \quad (\text{II}')$$

(22)  $E \times E$  est même un groupoïde de Brandt d'ordre 1; mais,  $C\mathcal{R}$  n'est pas un sous-groupoïde de Brandt. Pour cet usage, la notion de groupe partiel est plus souple que celle de groupoïde de Brandt.

(23) Si l'on n'impose pas aux sous-groupes partiels de contenir le sous-ensemble des éléments unités, on obtient une image des relations d'équivalence dans  $E$  (c'est-à-dire sur une partie de  $E$ ). Dans un groupe partiel, à la différence de ce qui se passe dans un hypergroupe partiel général, les unités d'un sous-groupe partiel à ce sens élargi doivent être prises parmi les unités du groupe partiel (car la relation  $ee = e$  caractérise les éléments unités, ce qui n'est pas vrai dans le cas général; cf. note 6).

(24) P. DUBREIL [1], p. 17.

(25) Cette notion a été introduite antérieurement par O. ORE [2], p. 581. Elle a été généralisée à des relations binaires quelconques et utilisée par P. DUBREIL, *Relations binaires et applications*, C.R., 230, 1950, p. 1028.

(26) Les théorèmes 9 et 10 et les cas particuliers correspondants des théorèmes 5 et 7 pour les relations d'équivalence figurent dans P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN [2], pp. 90 à 95.

—  $\mathcal{A}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_j$  et  $\mathcal{A}_i$  sont presque associables  
 $\mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_j$  sont presque associables (III')

—  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{A}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_j$  sont associables  
 $\mathcal{B}_j$  et  $\mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{A}_i$  sont associables (IV')

—  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_j$  sont associables (V')

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- G. BIRKHOFF [1], Lattice Theory, Colloquium, 1949.
- H. BRANDT [1], Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. Ann., 96, 1926, pp. 360-366.
- P. DUBREIL [1], Algèbre, tome I, Gauthier-Villars, 1946.
- P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN [2], Théorie algébrique des relations d'équivalence, Journal de math., 9<sup>e</sup> série, t. 18, 1939, pp. 63-95.
- J. KUNTZMANN [1], Contribution à l'étude des systèmes multiformes, Ann. Fac. Sciences de l'Université de Toulouse, 1939, pp. 155-195.
- O. ORE [1], Structures and group theory, I, Duke math. Journal, 3, 1937, pp. 149-174.
- O. ORE [2], Theory of equivalence relations, Duke math. Journal, 9, 1942, pp. 573-628.
- R. CROISOT [1], Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble, C.R., 226, 1948, p. 616.
- R. CROISOT [2], Condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaînes de mêmes extrémités dans une structure. Application aux relations d'équivalence et aux sous-groupes, C.R., 226, 1948, p. 767.
- R. CROISOT [3], Hypergroupes partiels, C.R., 228, 1949, p. 1090.
- R. CROISOT [4], Axiomatique des treillis modulaires, C.R., 231, 1950, p. 95.
- R. CROISOT [5], Diverses caractérisations des treillis semi-modulaires, modulaires et distributifs, C.R., 231, 1950, p. 1399.
- R. CROISOT [6], Sous-treillis, produits cardinaux et treillis homomorphes de treillis semi-modulaires, C.R., 232, 1951, p. 27.
-



# TABLE DES MATIÈRES

## Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie.

|                                                                                                                                                                    | Pages. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| INTRODUCTION.....                                                                                                                                                  | I      |
| CHAPITRE I. — <i>Introduction d'un certain nombre de conditions équivalentes à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie</i> .....                    | 3      |
| CHAPITRE II. — <i>Implications binaires reliant ces conditions dans les treillis quelconques et dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne</i> ..... | 13     |
| CHAPITRE III. — <i>Application à la caractérisation des treillis semi-modulaires de longueur finie</i> .....                                                       | 52     |
| CHAPITRE IV. — <i>Étude d'un exemple de treillis semi-modulaire de longueur infinie : le treillis des variétés linéaires fermées de l'espace de Hilbert</i> .....  | 56     |
| BIBLIOGRAPHIE.....                                                                                                                                                 | 63     |

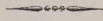
## Quelques applications et propriétés des treillis semi-modulaires de longueur infinie.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| INTRODUCTION.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 65  |
| CHAPITRE I. — <i>Application à l'axiomatique des treillis modulaires</i> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 67  |
| CHAPITRE II. — <i>Application aux treillis complémentés</i> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 85  |
| CHAPITRE III. — <i>Étude de la permanence des différentes conditions de semi-modularité par passage aux sous-treillis, produits cardinaux, treillis homomorphes</i> .....                                                                                                                                                                                                                                               | 89  |
| CHAPITRE IV. — <i>Une condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaînes finies de mêmes extrémités dans un treillis quelconque</i> .....                                                                                                                                                                                                                                                                | 106 |
| CHAPITRE V. — <i>Quelques cas d'égalité des longueurs de deux chaînes de sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible. Application à deux chaînes de sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversible, à deux chaînes de sous-groupes partiels d'un groupe partiel et, en particulier, à deux chaînes de sous-groupes d'un groupe et à deux chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble</i> ..... | 110 |
| BIBLIOGRAPHIE.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 127 |



---

## DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Inversion des opérateurs linéaires bornés  
dans l'espace de Hilbert.



*Vu et approuvé :*

Paris, le 1<sup>er</sup> mars 1951.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

A. CHÂTELET.

*Vu et permis d'imprimer :*

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

J. SARRAILH.



---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

139985-53

---

Dépôt légal, Imprimeur, 1953, n° 867.



---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS  
139985 Quai des Grands-Augustins, 55.

---